وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

# مطالعه‌ی ساختارهای جبری با ابزارهای منطقی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

فرزاد علمی

اساتید راهنما: دکتر سعید صالحی پورمهر
دکتر رشید زارع نهندی

شهریور ۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادرم

# قدردانی و تشکر

در اینجا جا دارد مراتب امتنان و تشکر خود را خدمت جناب دکتر سعید صالحی و جناب دکتر رشید زارع نهندی بخاطر زحمات و راهنمایی‌های سودمندشان ابراز نمایم. بویژه از جناب دکتر صالحی بخاطر ارائه‌ی کلاسهای بسیار سودمند و راهنمایی‌های بی‌بدیلشان در باب منطق و علوم کامپیوتر که مصداق حقیقی جمله‌ی کم، ولی رسید ی گوس بزرگ است، تشکر می‌نمایم.

فرزاد علمی ـشهریور ۸۹

# چکیده

هدف این پایان‌نامه مطالعه روش‌هایی برای توصیف متناهیِ گروه هاست. به‌طوری که آن گروه با این توصیف در حد ایزومورفیسم به صورت یکتا مشخص گردد. به طور مشخص دو روش برای چنین توصیفی از گروه دلخواهی چون $G$ به دست داده شده است.

الف— گروهی دلخواه چون $G$، قابل نمایش به وسیله یک اتوماتون متناهی است اگر و فقط اگر اعضای آن را بتوان به وسیله دنباله‌هایی روی یک الفبای متناهی نمایش داد به طوری که مجموعه‌ی دنباله‌های نمایشی از اعضای گروه و به خصوص رابطه‌ی تساوی بین آنها را بتوان با یک اتوماتون متناهی آزمود و به علاوه عمل گروه نیز به ازای هر دو عضو از آن قابل تشخیص با این اتوماتون باشد.

ب— یک گروه نامتناهی با تولید متناهی، شبه متناهیاً اصل پذیر است اگر و فقط اگر با دانستن نامتناهی بودن ومتناهی التولید بودن آن، جمله‌ی درجه اولی در زبان آن گروه چنان موجود باشد که آن را با تقریب یکریختی به صورت یکتا توصیف کند.

در پایان‌نامه سعی شده است، ابتدا شرح مختصری از اتوماتونهای متناهی برای نیل به قضایا و تعریف روش اول و مفاهیم منطقی برای نیل به قضایا و تعریف روش دوم ارائه شود. محدودیتها و پیچیدگی این دو روش نیز تا حدودی بررسی شده است.

منبع اصلی این پایان‌نامه مقاله‌ی زیر می‌باشد:

*André Nies, Describing Groups, The Bulletin of Symbolic Logic, Volume* 13, *Number* 3, *Sept.* 2007, 305 − 339.

# فهرست

# ۲ $FA$—نمایش پذیری

## ۳ ساختارهای جبری $FA$ـنمایش پذیر



## ۴ ساختارهای جبری شبه متناهیاً اصل پذیر

# مقدمه

چگونه می توان یک گروه شمارش پذیر نامتناهی را به وسیله اطلاعات محدودی توصیف کرد؟
اولین راهی که به ذهن خطور میکند، ارائه‌ی یک نمایش متناهی از آن گروه است.

یک نمایش از یک گروه چون $G$ عبارت است از دوتایی مرتب $(\mathcal{A}, \mathfrak{R})$ که‌در آن $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی مولدهای$G$ و $\mathfrak{R}$ زیرمجموعه‌ای از گروه آزاد روی $\mathcal{A}$ است $(\mathfrak{R} \subseteq F[\mathcal{A}])$ که $e$ انگاشته می شوند. چون هر معادله در زبان یک گروه را می‌توان طوری بازنویسی کرد که یک طرف آن $e$ (عضو همانی گروه )باشد، پس می‌توان $\mathfrak{R}$ را مجموعه‌ای از معادلات درست در $G$ تلقی نمود. می‌توان ثابت نمود هر گروه دلخواه چون $G$ دارای یک نمایش است. در واقع بدیهی ترین نمایش برای هر گروه آن است که مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعضای $G$ فرض کنیم و $\mathfrak{R}$ را مجموعه‌ی همه‌ی روابط درست در این گروه در نظر بگیریم. (که البته به صورت یک طرف $e$ نوشته شده اند.)

گروه $G$ دارای نمایشی متناهی است اگر و فقط اگر اولاً $\mathcal{A}$ مجموعه ای متناهی باشد( به عبارت دیگر $G$ متناهی التولید باشد) و ثانیاً $\mathfrak{R}$ مجموعه ای متناهی باشد( به عبارت دیگر $G$ متناهیاً اصل پذیر باشد).

اما همه‌ی گروه‌ها، دارای نمایش متناهی نیستند. مثلا خیلی از گروه‌ها، باتولید متناهی نیستند، به علاوه گروه‌های باتولید متناهی بسیاری وجود دارند که متناهیاً اصل پذیر نیستند. به علاوه مساله‌ای که هنوز حل نشده باقی مانده، و به مساله کلمه[1] مشهور است، در این زمینه وجود دارد که سوالی در مورد دو نمایش مختلف از یک گروه است. آیا روشی کارآمد وجود دارد که بتواند تصمیم بگیرد که دو نمایش متناهی، یک گروه را توصیف می‌کنند یا خیر؟

آیا روشی کارآمد وجود دارد که با استفاده از نمایش متناهی از یک گروه تصمیم بگیرد که عضو مفروض $x$، عضو همانی است یا خیر؟

به طور شهودی منظور از یک روش کارآمد، دستور العملی مرحله به مرحله است که برای اجرای هر مرحله احتیاج به خلاقیت خاصی نداشته باشد. برای تدقیق این مفهوم شهودی مفاهیمی چون اتوماتون‌ها و ماشین‌های محاسبه معرفی شده است، که شرح مختصری از آنها در فصل مقدمات آمده است.

[1] word problem

همانطور که در مورد نمایش متناهی یک گروه گفته شد، شرط دوم وجود یک نمایش متناهی برای گروهی چون $G$، متناهیاً اصل پذیر بودن آن است، به‌طوری که آن گروه با این توصیف در حد یکریختی به صورت یکتا مشخص گردد. این همان چیزی است که این پایان‌نامه را به منطق و قضایای منطقی در مورد ساخت‌های متناهیاً اصل پذیر پیوند می‌دهد.

به طور مشخص دو روش برای چنین توصیفی از گروه دلخواهی چون $G$ به دست داده شده است.

الف− گروهی دلخواه چون $G$، قابل نمایش به وسیله یک اتوماتون متناهی است اگر و فقط اگر اعضای آن را بتوان به وسیله دنباله‌هایی روی یک الفبای متناهی نمایش داد به طوری که مجموعه‌ی دنباله‌های نمایشی از اعضای گروه و به خصوص رابطه‌ی تساوی بین آنها را بتوان با یک اتوماتون متناهی آزمود و به علاوه عمل گروه نیز به ازای هر دو عضو از آن قابل تشخیص با این اتوماتون باشد.

ب− یک گروه نامتناهی با تولید متناهی، شبه متناهیاً اصل پذیر است اگر و فقط اگر با دانستن نامتناهی بودن و با تولید متناهی بودن آن، جمله‌ی درجه اولی در زبان آن گروه چنان موجود باشد که آن را با تقریب یکریختی به صورت یکتا توصیف کند.

این پایان‌نامه به چهار فصل تقسیم شده است. در فصل اول، به معرفی و تعریف مفاهیمی می‌پردازیم که برای درک قضایا و مفاهیم بخش‌های اصلی این پایان‌نامه ضروری به نظر می‌رسند. در این فصل برای روشن شدن این مفاهیم مثالها و قضایایی آورده شده که کلید فهم مثالها و قضایای بخش‌های بعدی خواهند بود و پیوسته به آنها رجوع خواهد شد.

در فصل دوم، به تشریح روش الف برای توصیف گروه ها، ولی در مقیاسی گسترده تر، دست زده ایم. یعنی مفاهیم و قضایای نمایش پذیری توسط یک اتوماتون، برای ساخت ها (که دایره‌ی آنها بسیار وسیع‌تر از گروه‌هاست) توضیح داده شده‌است.

در فصل سوم، با استفاده از قضایای عمومی که برای ساخت‌ها مطرح کرده‌ایم، قضایایی در مورد ساختارهای جبری و به خصوص گروه‌ها مطرح شده‌است و پیچیدگی گروه‌هایی که به این روش قابل توصیف اند، بررسی شده‌است.

در فصل چهارم، به تشریح روش ب برای توصیف گروه‌ها، یعنی صورت‌بندی منحصر به فرد یک گروه با شرایطتوضیح داده شده، پرداخته ایم.

# فصل اول
# مقدماتی از منطق و علوم کامپیوتر

## ۱.۱ زبانها و اتوماتونهای متناهی و نامتناهی

### ۱.۱.۱ زبانها

مجموعه‌ی غیر تهی و متناهی $\Sigma$ از نمادها را به عنوان الفبا در نظر بگیرید. به هر دنباله متناهی از نمادهای $\Sigma$ یک کلمه روی $\Sigma$ می گویند.

مجموعه تمام کلمات روی $\Sigma$ را با $\Sigma^*$ نمایش می دهند. اتصال کلمه‌ی $V$ به کلمه‌ی $U$، دنباله ایست که از پیوستن دنباله $V$ به انتهای راست $U$ بدست می آید و آنرا با $UV$ نمایش می دهیم. دنباله ای به طول صفر روی هر الفبای دلخواه را کلمه تهی می نامند و معمولا آنرا با $\lambda$ نمایش می دهند.

طول هر کلمه مثل $U$ در واقع طول دنباله ایست که $U$ نماد آن است و آنرا با $|U|$ نمایش می دهیم. به طور مثال واضح است که $|\lambda| = ۰$ و اگر $U = abca$ باشد آنگاه $|U| = ۴$ است، یا به طور مثال $|UV| = |U| + |V|$.

یک زبان چون $\mathcal{L}$ زیر مجموعه‌ای از $\Sigma^*$ است. اگر کاردینال $\mathcal{L}$ متناهی باشد $\mathcal{L}$ را یک زبان متناهی و اگر نامتناهی باشد آنرا یک زبان نامتناهی می نامیم. چون زبانها مجموعه هستند، عملیات اجتماع، اشتراک و تفاضل برای آنها قابل تعریف است.

متمم زبان $\mathcal{L}$ عبارتست از مجموعه‌ی همه دنباله های متناهی از اعضای $\Sigma$ که در $\mathcal{L}$ نیست. یعنی $\overline{\mathcal{L}} = \Sigma^* - \mathcal{L}$

اتصال دو زبان $\mathcal{L}_۱$ و $\mathcal{L}_۲$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{L}_۱\mathcal{L}_۲ = \{UV | U \in \mathcal{L}_۱, V \in \mathcal{L}_۲\}$$

$\mathcal{L}^n$ به معنی $n$ بار اتصال $\mathcal{L}$ به خودش است. و برای $\mathcal{L}^\circ$ داریم $\mathcal{L}^\circ = \{\lambda\}$

### ۲.۱.۱ اتوماتونها

اتوماتونهادر واقع صورتبندیی از ماشینهای محاسباتی هستند که می توانند الگوریتم‌هایی که به صورت شفاهی در زبانهای طبیعی چون فارسی و انگلیسی بیان می شوند را دنبال نمایند.

به عبارت دیگر اتوماتونها مدلهای انتزاعی از کامپیوتر هستند به طوری‌که هر اتوماتون مخصوص تعقیب یک الگوریتم خاص طراحی می شود. همه اتوماتونها دارای مکانیزمی برای خواندن ورودی هستند. فرض می شود که این ورودی رشته ای از الفبای داده شده است که روی یک فایل ورودی نوشته شده است.

اتوماتون می تواند فایل ورودی را بخواند ولی نمی تواند آنرا تغییر دهد. فایل ورودی به سلولهایی تقسیم شده و هر سلول یک نشانه از الفبا را می تواند در خود جای دهد. فایل ورودی از چپ به راست و هر بار یک نشانه خوانده می شود. مکانیزم خواندن می تواند انتهای ورودی را تشخیص دهد و نوعاً در هر مرحله از خواندن می تواند خروجی ( که لزوماً در الفبای کلمه ورودی نیست) تولید نماید. به صورت کلی اتوماتونها ( و نه اتوماتونهای متناهی که در این پایان نامه با آنها سروکار داریم) می توانند دارای حافظه‌ی موقت باشند، که دارای تعداد نامتناهی سلول است و هر کدام می توانند یک نشانه از الفبا را در خود جای دهند. اتوماتون دارای وضعیتهای (حالات) داخلی ای است که در هر زمان (در هر مرحله) می تواند در یکی از این وضعیتها باشد.

اتوماتون با خواندن یک حرف از ورودی و با توجه به حالتی که در آن قرار دارد و نیز اگر دارای حافظه باشد، با توجه به محتوای آن، وضعیت بعدی خود را تعیین می کند. تغییر از یک حالت به حالت بعدی را یک مرحله و یا یک حرکت می نامند. دست آخر آنکه اتوماتونها به دو دسته‌ی قطعی و غیر قطعی تقسیم می شوند. اگر تغییر وضعیت یک اتوماتون توسط یک تابع صورت گیرد، یعنی در هر مرحله با معلوم بودن وضعیتی که اتوماتون در آن قرار دارد و نیز معلوم بودن ورودی که خوانده می شود، وضعیت بعدی به صورت منحصربه فرد تعیین شود، آنگاه آن اتوماتون را قطعی (معین) می گوییم. در غیر این صورت یعنی اتوماتونهایی که تغییر وضعیت در آنها توسط یک رابطه ( و نه لزوماً یک تابع ) صورت می گیرد را اتوماتونهای غیر قطعی (نامعین) می گویند.

**اتوماتونهای متناهی قطعی** $(DFA)$

همانطور که قبلاً اشاره شد، یک اتوماتون متناهی قطعی[1]، اتوماتونی است که دارای حافظه موقت نیست بنابراین این نوع اتوماتونها در بیاد آوردن اطلاعات در طول محاسبه مشکل دارند و مقدار کمی اطلاعات را و آن هم به صورت قرار گرفتن در یک وضعیت داخلی می توانند به خاطر بسپارند و ضمناً تعداد وضعیتهای ( حالات ) آن ها نیز متناهی است.

یک اتوماتون قطعی به وسیله شش‌تایی $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \mathcal{D}^*, \delta, q_\circ, \mathcal{F})$ تعریف می شود که در آن:

$\mathcal{Q}$ : مجموعه‌ای متناهی است که مجموعه وضعیتهای اتوماتون را مشخص می کند.

$\Sigma$ : مجموعه‌ای متناهی از نشانه هااست که مجموعه الفبای ورودی را معین می کند.

$\mathcal{D}$ : مجموعه‌ای متناهی از نشانه‌هااست که الفبای خروجی نامیده می شوند. توجه داشته باشید که اتوماتونهایی که خروجی تولید نمی کنند و به آنها پذیرنده ی متناهی گفته می شود، این مجموعه را ندارد .

$\delta$ : تابع تغییر حالت که به صورت $\delta : \mathcal{Q}\times\Sigma \to \mathcal{Q} \times \mathcal{D}$ مشخص می شود.

$q_\circ$ : عضوی از $\mathcal{Q}$ است که اتوماتون همواره از این حالت شروع به کار می کند.

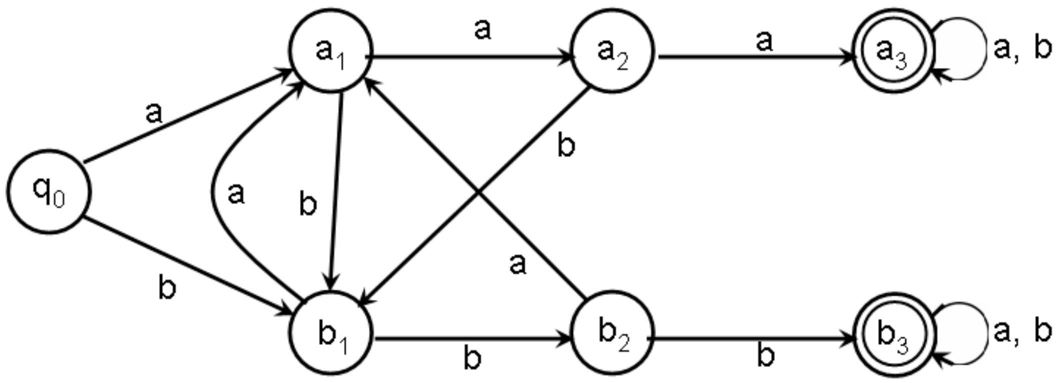
$\mathcal{F}$ : زیر مجموعه ای از حالات که وضعیتهای پذیرش نهایی نامیده می شوند، بدین معنی که اگر در انتهای

[1] Determinestic Finite Automata

پردازش یک کلمه، اتوماتون در یکی از این وضعیتها قرار داشته باشد، پردازش به درستی انجام شده است.

مثال ۱.۱.۱ : مثلاً اتوماتونی را در نظر بگیرید که الفبای کلمات ورودی آن $\Sigma = \{a, b\}$ باشد و تمام کلماتی را که دارای حداقل سه $a$ ی پشت سر هم یاسه $b$ ی پشت سر هم باشند را پذیرش کند. طرح این اتوماتون را با گراف زیر نمایش می دهیم. این گراف در واقع معرف تابع $\delta$ برای این اتوماتون است.

در این اتوماتون $\Sigma = \{a, b\}$ و مجموعه وضعیتهای این اتوماتون به صورت $\mathcal{Q} = \{q_۰, a_۱, a_۲, a_۳, b_۱, b_۲, b_۳\}$




شکل ۱—۱: مثالی از یک اتوماتون قطعی

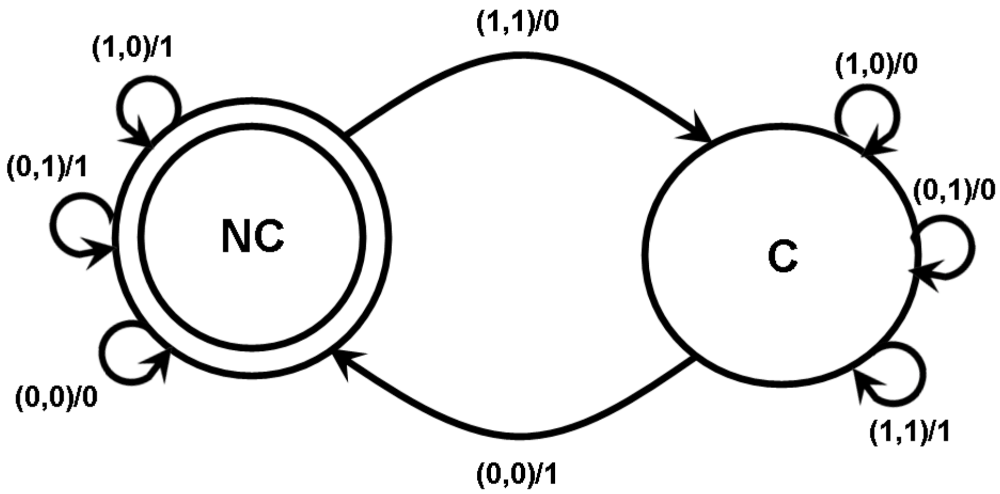
است. این اتوماتون خروجی تولید نمی کند، پس همانطور که قبلاً گفته شد الفبای خروجی یعنی $\mathcal{D}$ را ندارد و در واقع یک پذیرنده‌ی متناهی است.

$q_۰ \in \mathcal{Q}$ حالت ابتدایی این اتوماتون است یعنی حالتی که اتوماتون زمانیکه هنوز هیچ ورودی را نخوانده در آن قرار دارد. در این اتوماتون $\mathcal{F} = \{a_۳, b_۳\} \subset \mathcal{Q}$ است و نشان می دهد که اگر در انتهای زنجیره محاسباتی روی یک کلمه ورودی، اتوماتون در حالت $a_۳$ یا $b_۳$ باشد این اتوماتون آن کلمه را می پذیرد. به طور مثال برای این اتوماتون زنجیره محاسباتی روی کلمه $abba$ به صورت زیر است :

ابتدا اتوماتون در حالت $q_۰$ قرار دارد. با خواندن اولین حرف ورودی ( یعنی $a$ ) این اتوماتون به حالت $a_۱$ می‌رود. ($\delta(q_۰, a) = a_۱$) سپس این اتوماتون با خواندن حرف بعدی از این کلمه( یعنی $b$ ) به حالت $b_۱$ می رود ($\delta(a_۱, b) = b_۱$) با خواندن $b$ بعدی از کلمه ورودی اتوماتون به حالت $b_۲$ و با خواندن آخرین حرف این کلمه

یعنی $a$ به حالت $a_۱$ می رود. در اینجا کلمه تمام می شود در حالیکه اتوماتون در وضعیت $a_۱$ که جزء وضعیتهای پذیرش نهایی این اتوماتون نیست، قراردارد. پس اتوماتون این کلمه را نمی پذیرد. می توان این زنجیره محاسبات و تغییر وضعیت‌ها را به طور خلاصه به صورت $\delta(q_۰, abba) = a_۱$ نمایش داد. با دنبال کردن روش گفته شده در بالا برای کلمه‌ی $abba$ می توان نشان داد که $\delta(q_۰, abbba) = b_۳$،چون این بار اتوماتون در نهایت در $b_۳$ که یکی ازحالات پذیرش نهایی است قرار می گیرد، این اتوماتون کلمه ی $abbba$ را می پذیرد.

مثال ۲.۱.۱ : مثالی دیگر از اتوماتونهای قطعی با خروجی، اتوماتون نمایش داده شده با گراف زیر است که دو عدد باینریِ $n$ بیتی را گرفته و یک عدد $n$ بیتی را به عنوان جمع این دو تولید می کند.




شکل ۱—۲: اتوماتون قطعی با خروجی، که دو عدد طبیعی را با هم جمع می کند.

این اتوماتون عدد باینری $b$ را که به صورت $\overline{b_{n-۱}...b_۱b_۰}$ و عدد باینری $a$ که به صورت $\overline{a_{n-۱}...a_۱a_۰}$ است را از راست به صورت زوج مرتب های $(a_i, b_i)$ می خواند و بر اساس رقم نقلی که از جمع جفت بیت های قبلی حاصل شده، جمع این دو بیت را در خروجی تولید می کند. اگر بعد از جمع این $n$ بیت این اتوماتون در حالت $NC$ $(No \ \ Carry)$ باشد این جمع بدرستی یعنی بدون سرریز[۲] در $n$ بیت صورت گرفته است. ولی اگر در انتهای جمع بیتهای آخر $a$ و $b$ اتوماتون در حالت $C$ قرار داشته باشد $(Carry)$ یعنی سرریز صورت گرفته و این جمع نه در $n$ بیت بلکه در $n + ۱$ بیت قابل نمایش است و در نتیجه جمع به درستی در $n$ بیت صورت نگرفته است. مجموعه حالات این اتوماتون $(Q)$ عبارتست از $\{NC, C\}$.

[۲] Over flow

الفبای ورودی آن $\Sigma = \{۰, ۱\}$ و الفبای خروجی آن $\mathcal{D} = \{۱, ۰\}$ است. تابع $\delta$ از گراف این اتوماتون قابل حصول است. وضعیت اولیه این اتوماتون یعنی $q_۰$ همان وضعیت $NC$ و وضعیت نهایی یا پذیرش آن نیز $\mathcal{F} = \{NC\}$ است.

### اتوماتونهای غیر قطعی $(NFA)$

اتوماتونهای غیر قطعی[۳] نیز دقیقاً مانند اتوماتون های قطعی هستند. با این تفاوت که در آن‌ها تابع $\delta : \mathcal{Q}\times\Sigma \rightarrow \mathcal{Q} \times \mathcal{D}$ جای خود را به رابطه $\delta \subseteq \mathcal{Q}\times\Sigma\times\mathcal{Q} \times \mathcal{D}$ می دهد.

می توان نشان داد که هر $(NFA)$ رامیتوان به صورت کارآمدی (الگوریتم وار) به یک $(DFA)$ تبدیل نمود و بنابراین ما از بررسی آن در اینجا چشم پوشی می کنیم.

### زبانهای منظم و لم تزریق

اتوماتون $\mathfrak{M}$ را در نظر بگیرید. زبان این اتوماتون تمام کلماتی روی الفبای ورودی است که این اتوماتون را در نهایت در یکی از حالات پذیرش خود قرار می دهند. یعنی برای $\mathfrak{M} = (\mathfrak{Q}, \Sigma, \mathfrak{D}^*, \delta, \mathfrak{q}_۰, \mathfrak{F})$ داریم :

$\mathcal{L}_M = \{w \in \Sigma^* | \delta(q_۰, w) \in \mathcal{F}\}$: زبان مربوط به اتوماتون $\mathcal{M}$ =

{ همه کلماتی روی الفبای $\Sigma$ که اتوماتون با اعمال محاسبه روی آنها در نهایت در یکی از وضعیتهای پذیرش نهایی خود قرار می گیرد}.

به زبان $\mathcal{L}$ که توسط یک اتوماتون متناهی پذیرفته شود زبانی منظم گفته می شود. به عبارت دیگر زبان $\mathcal{L}$ منظم است اگر و فقط اگر اتوماتون متناهی وجود داشته باشد که با شروع از وضعیت $q_۰$ خود و تحت محاسبه روی هر یک از کلمات متعلق به زبان $\mathcal{L}$ در نهایت در وضعیت پذیرش نهایی قرار گیرد.

واضح است که هر زبان متناهی منظم است. برای درک این مطلب می توان اتوماتونی را در نظر گرفت که دارای

[۳] Non-determinestic Finite Automata

دو وضعیت $Acc$ و $Rej$ است که به ترتیب وضعیت‌های پذیرش و رد هستند. $q_0$ این اتوماتون $Acc$ و$\mathcal{F}$ این اتوماتون را نیز $\{Acc\}$ در نظر می گیریم. این اتوماتون به ازای تمام کلمات $\mathcal{L}$ به‌حالت $Acc$ و در غیر این صورت به حالت $Rej$ می رود.

اما در مورد زبان های منظم نامتناهی لم زیر را داریم:

لم تزریق :

فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان منظم نامتناهی باشد که توسط اتوماتونی چون $\mathcal{M}$ که دارای $n$ وضعیت داخلی است پذیرفته می شود ( $|\mathcal{Q}| = n$ ) و نیز فرض کنید که این زبان شامل کلمه ای مثل $w$ که دارای طولی بزرگتر یا مساوی $n$ است، باشد.( $|w| \geq n$ ). چون $\mathcal{L}$ نامتناهی است، حتماً دارای چنین $w$ای هست. در این صورت تجزیه ای چون $w = xyz$ برای کلمه $w$ وجود دارد که در آن $|xy| \leq n$ و $|y| \geq ۱$ به طوری که $w_i = xy^iz$ به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ در زبان $\mathcal{L}$ باشد.

برای اثبات این مطلب فرض کنید که این $DFA$ دارای وضعیتهای $q_0, ..., q_{n-1}$ باشد. حال کلمه ی $w$ که طبق فرض اندازه‌ی آن بزرگتر یا مساوی $n$ است، را در نظر بگیرید. مجموعه ی وضعیت هایی راکه اتوماتون حین پردازش $w$ از آنها می گذرد را در نظر بگیرید و فرض کنید این ترتیب به صورت $q_0, ..., q_i, .., q_f$ باشد. چون این ترتیب حداقل دارای $n + ۱$ وضعیت است (چون طول کلمه ی $w$ بزرگترمساوی $n$ است)، طبق اصل لانه کبوتری لااقل یک وضعیت باید تکرار شود. به این معنی که این اتوماتون متناهی حداکثر پس از $m$ حرکت به یک وضعیت قبلی باز می گردد.

یعنی این ترتیب باید به صورت $q_0, ..., q_r, ..., q_r, ..., q_f$ باشد.

$$\underbrace{q_0, q_i, ...,}_{x} \underbrace{q_r, ..., q_r,}_{y} \underbrace{..., q_f}_{z}$$

همان طور که دربالا نمایش داده شده کلمات $x$ و $y$ و $z$ را چنان انتخاب می‌نماییم که $\delta(q_0, x) = q_r$ و$\delta(q_r, y) = q_r$ و$\delta(q_r, z) = q_f$ داریم: $|xy| \leq n$ و نیز واضح است که $|y| \geq ۱$، یعنی $y$ کلمه ی تهی نیست، ولی ممکن است $z$ کلمه ای تهی باشد. براحتی می توان دید که این دور زدن حالت ماشین در پروسه ی پردازش $y$ را از هر مرتبه می توان تکرار کرد. چون $\delta(q_r, y) = q_r$ پس $\delta(q_r, yy) = q_r$ و نیز $\delta(q_r, yyy) = q_r$ وقس علی

هذا. یعنی برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم: $\delta(q_r, y^i) = q_r$. پس $\delta(q_\circ, xy^iz) = q_f$ و چون $q_f \in \mathcal{F}$ (چراکه طبق فرض $w$ کلمه ای است که توسط این اتوماتون پذیرفته میشود) پس هر $w_i$ عضو این زبان منظم است.
مثلاً زبان $\mathcal{L} = \{a^nb^n | n \in \mathbb{N}\}$ منظم نیست.

اثبات: فرض کنیم که این زبان زبانی منظم باشد، پس توسط یک اتوماتون متناهی بامثلاً تعداد وضعیتهای داخلی $k$ پذیرفته می‌شود. مشخص است که $w = a^kb^k$ عضو این زبان است. چون $w \in \mathcal{L}$ و $|w| \geq k$ پس طبق لم تزریق تجزیه ای برای $w$ به صورت $w = xyz$ با شرایط $|xy| \leq k$ و $|y| \geq ۱$ وجود دارد که به ازای هر $i$، $w = xy^iz$ عضوی از $\mathcal{L}$ است. پس اگر $xy = a^s$ را در نظر بگیریم بطوری که $۱ \leq r \leq s \leq k$، داریم $y = a^r$ و $x = a^{s-r}$ و $z = a^{k-s}b^k$. طبق لم تزریق $w_\circ = xy^\circ z = xz$ نیز عضو $\mathcal{L}$ است یعنی $w_\circ = a^{k-r}b^k$ عضو $\mathcal{L}$ است که واضحاً این طور نیست و فرض اولیه مبنی بر منظم بودن این زبان غلط است.

## ۲.۱ زبان‌های مرتبه اول و ساخت های مربوط به آن‌ها

### ۱.۲.۱ زبان‌های مرتبه اول

هر عبارت در یک زبان مرتبه اول، دنباله متناهی از نمادهای مرتبه اول آن زبان است که قواعد خاصی ( گرامر زبان ) در آنها رعایت شده باشد. در اینجا ما ابتدا به تشریح نمادهای یک زبان مرتبه اول می پردازیم و سپس به طور اجمالی قواعد زبان و چگونگی رعایت آنها را توضیح می دهیم.
نمادهای یک زبان مرتبه اول : به طور کلی این نمادها به دو دسته‌ی ۱− نمادهای منطقی و ۲− نمادهای پارامتری تقسیم می شوند.
نمادهای منطقی : نمادهای منطقی در همه زبانهای مرتبه اول مشترکند و عبارتند از : پرانتز ها، نمادهای ربطی

جمله ای $(\to, \leftrightarrow, \neg, \wedge, \vee)$، متغییرهای زبان که معمولاً تعداد آنها را شمارش پذیر در نظر می گیرند و سرانجام نماد تساوی که وجود آن اختیاری است. اگرچه این نماد در واقع یک نماد محمولی دو موضعی است ولی با آنها متفاوت است چراکه یک نماد منطقی به حساب می آید و نه یک نماد پارامتری ( این وضع در ترجمه این نماد به فارسی مؤثر خواهد بود.)

نمادهای پارامتری:

شامل نمادهای سوری (سور عمومی $\forall$ و سور وجودی $\exists$ ) ، نمادهای محمولی ( نمادهای رابطه ای )، نمادهای تابعی و نمادهای ثوابت هستند.

بعضی از عبارتها را نمی‌توان ترجمه ی هیچ جمله‌ی با معنی فارسی دانست و در واقع مهملاتی بیش نیستند. مانند $((\exists \to x$.

می خواهیم فرمولهای خوش ساخت عبارتهایی باشند که ساخت دستوری درستی دارند. (به طور شهودی یعنی بتوان برای آن ها ترجمه ای مناسب در زبان طبیعی به دست آورد.) بنابراین باید برای این عبارتها تعریفی به دست دهیم که عبارتهای غیر دستوری حذف شوند.

ابتدا از تعریف ترمها (نام اشیاً مورد بحث یا ضمائر آنها) شروع می کنیم. هرنماد ثابت یا نماد متغیر، یک ترم است. بعلاوه به ازای هر نماد تابعی $n$ موضعی $\mathcal{F}$ و ترمهای $t_۱$ تا $t_n$ در زبان مورد نظر، $\mathcal{F}(t_۱, t_۲, ..., t_n)$ نیز ترمی از این زبان است. این تعریف، یک تعریف استقرائی برای مجموعه ی ترمهای این زبان ارائه می‌دهد. این تعریف را در یک جمله می توان چنین بیان نمود که : مجموعه ترمهای یک زبان درجه اول، مجموعه ی پدید آمده از نماد ثوابت و متغیر های آن زبان بوسیله ی نمادهای تابعی این زبان است.

مثال ۱.۲.۱ : زبانی با نمادهای زیر را در نظر بگیرید : ۱− این زبان شامل تساوی هست. ۲− پارامترهای این زبان عبارتند از : ۱− یک نماد تابعی یک موضعی $S$، ۲− یک نماد تابعی دو موضعی +، ۳− یک نماد ثابت ۰ و ۴− یک نماد محمولی دو موضعی $\leq$.

عبارت‌های $x$، $S(x)$ ، $S(x) + S(۰)$، $S(S(x))$ همه جزء ترمهای این زبان هستند، ولی $S((x) + +۰$ جزء ترمهای این زبان نیست، چون نمی توان آنرا به صورت استقرائی از مجموعه نمادهای ثوابت ( که در اینجا$\{۰\}$

می باشد) و نمادهای متغیر با استفاده از نمادهای تابعی ( که در اینجا $\{S,+\}$ هستند ) بدست آورد. بعلاوه $S(S(0)) = S(x)$ نیز یک ترم از این زبان نیست، چراکه در این فرمول از نماد $=$ استفاده شده که نه نماد تابعی و نه نماد ثابت یا متغییر است.

فرمولهای اتمی ( فرمولهای بسیط) :

به ازای هر نماد محمولی $n$ موضعی $\mathfrak{R}$ و ترمهای $t_1$ تا $t_n$ از یک زبان مرتبه اول $\mathfrak{L}$، $\mathfrak{R}(t_1, t_2, ..., t_n)$ یک فرمول اتمی است. مثلا در مثال ۱.۲.۱ ، $x \leq y$ یک فرمول بسیط است یا $x = S(y)$ یک فرمول بسیط است ولی $(x \leq S(0)) \to (x = S(0))$ یک فرمول بسیط نیست چون در آن از علامت منطقی $\to$ استفاده شده که نه یک ترم است و نه یک نماد محمولی.

فرمولهای خوش ساخت:

مجموعه $\mathfrak{B}$، شامل همه فرمولهای اتمی یک زبان درجه اول مثل $\mathfrak{L}$ را در نظر بگیرید. مانند قبل تعریف استقرائی برای فرمول خوش ساخت از یک زبان درجه اول ارائه می دهیم.

مجموعه پدید آمده از $\mathfrak{B}$ توسط نمادهای منطقی و سورهای وجودی و عمومی را مجموعه فرمولهای خوش ساخت $\mathfrak{L}$ می نامیم. این بدین معنی است که اگر $\beta$ و $\alpha$ دو فرمول اتمی از زبان درجه اول $\mathfrak{L}$ باشند، آنگاه $\alpha \to \beta \ , \ \alpha \leftrightarrow \beta \ , \ \alpha \wedge \beta \ , \ \alpha \vee \beta \ , \ \neg\alpha \ , \ \exists x\alpha \ , \ \forall x\alpha$ همگی فرمولهای خوش ساخت زبان $\mathfrak{L}$ هستند.

به طور مثال در مثال ۱.۲.۱ $\exists x \quad x = S(y)$ یک فرمول خوش ساخت است چراکه $\alpha : x = S(y)$ یک فرمول اتمی است پس $\exists x\alpha$ طبق تعریف یک فرمول خوش ساخت است. یا $(x \leq S(0)) \to (x = S(0))$ نیز یک فرمول خوش ساخت است.

جمله:

یک فرمول خوش ساخت را یک جمله می نامیم اگر هیچ یک از متغیرهای بکار رفته در آن بدون سور نباشند. به متغیرهایی که در یک فرمول خوش ساخت مقید به سوری نباشند متغیر آزاد گفته می شود. مثلا در زبان شرح داده شده در مثال ۱.۲.۱ در فرمول $\exists x \quad x \geq S(y)$، $x$ متغیر مقید و $y$ متغیر آزاد است.

### ۲.۲.۱ ساخت ها ( مدلها )

ساختها در واقع ترجمه کنندگان زبان صوری به یک زبان طبیعی ( مثلاً فارسی ) هستند. یک ساخت برای یک زبان مرتبه اول معلوم می کند که: ۱ــ نمادهای سور عمومی و وجودی به چه دسته از اشیاء اشاره می کنند. ۲ــ پارامترهای دیگر زبان یعنی نمادهای ثابت، محمولی و تابعی بیانگر چه هستند. به طور صوری یک ساخت $\mathfrak{A}$ برای یک زبان مرتبه اول تابعی است که دامنه ی آن مجموعه پارامترهای زبان است بطوریکه :

۱ــ $\mathfrak{A}$ به نمادهای سوری $\forall,\exists$ یک مجموعه‌ی غیر تهی $|\mathfrak{A}|$ را که عالم سخن نامیده می شود را نسبت می دهد.

۲ــ $\mathfrak{A}$ به هر نماد محمولی $n$ موضعی $\mathfrak{R}$ رابطه $n$ تایی مانند $\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$ را نسبت می دهد. یعنی $\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}}$ مجموعه ای از $n$ تاییهایی از عالم سخن است.

۳ــ $\mathfrak{A}$ به هر نماد ثابت $\mathfrak{c}$ یک عضو چون $\mathfrak{c}^{\mathfrak{A}}$ از عالم سخن یعنی $|\mathfrak{A}|$ را نسبت می دهد.

۴ــ $\mathfrak{A}$ به هر نماد تابعی $n$ موضعی مانند $\mathfrak{f}$ یک عمل $n$ تایی مثل $\mathfrak{f}^{\mathfrak{A}}$ را روی $|\mathfrak{A}|$ نسبت می دهد، یعنی $\mathfrak{f}^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$ .

توجه کنید که فرضهای اساسی ما غیر تهی بودن عالم سخن ( $|\mathfrak{A}|$ ) و کلی بودن تابع $\mathfrak{f}^{\mathfrak{A}}$ است. یعنی دامنه‌ی $\mathfrak{f}^{\mathfrak{A}}$ باید همه‌ی $|\mathfrak{A}|^n$ باشد.

مثال ۲.۲.۱۱ : زبان مشروح در مثال ۱.۲.۱ را در نظر بگیرید. یک ساخت $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ برای این زبان به صورت زیر است :

۱ــ $|\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}|$ : عالم سخن در این مثال مجموعه اعداد طبیعی یا $\mathbb{N}$ است.

۲ــ نماد تابعی $S$ به تابع تالی اشاره دارد و نماد تابعی دو متغیره‌ی $+$، همان جمع اعداد طبیعی است.

۳ــ نماد محمولی دو موضعی $\leq$، همان رابطه ترتیب معمولی در $\mathbb{N}$ است.

۴ــ نماد $\circ$ همان صفر اعداد طبیعی است.

ما معمولاً یک ساخت را بدون معرفی زبانی که آن ساخت بدان اشاره دارد معرفی می کنیم، چرا که از روی توابع، روابط و ثوابتی که یک ساخت معرفی می کند، می توان به زبان مربوط به آن پی برد. مثلا می نویسیم $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} = (\mathbb{N}, \leq, +, S, \circ)$ و منظورمان همان ساخت توضیح داده شده در بالاست. زبان این ساخت مشخصاً

متشکل از یک نماد محمولی دو موضعی $\leq$ و نمادهای تابعی یک موضعی $S$ و دو موضعی $+$ و ثابت $0$ است.

حال با استفاده از یک ساخت برای یک زبان مرتبه اول می توانیم مشخص کنیم که چه جملاتی در زبان $\mathfrak{L}$ در این ساخت درست است و چه جملاتی غلط هستند. مثلاً جمله $\forall x \exists y\ x \leq y$ در ساخت $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ درست است. و این مطلب را چنین می نویسیم : $\models_{\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}} (\forall x \exists y\ x \leq y)$. یا $\forall x\ S(0) \leq x$ در ساخت $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ غلط است، چراکه $x$ مساوی صفر مثال نقض آن است و آن را این گونه می نویسیم: $\not\models_{\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}} (\forall x\ S(0) \leq x)$.

تعریف: فرض کنید $\Gamma$ یک مجموعه از جملات خوش ساخت و $\varphi$ یک جمله خوش ساخت در یک زبان مرتبه اول باشد. در این صورت $\Gamma$ منطقاً مستلزم $\varphi$ است و می نویسیم $\Gamma \models \varphi$ اگر و فقط اگر به ازای هر ساخت $\mathfrak{A}$ برای زبان مورد نظر که اعضای $\Gamma$ در آن صادق باشد آنگاه $\varphi$ نیز در آن ساخت صدق کند. مثلاً فرض کنید $\Gamma = \{(\forall x \exists y\ x < y), (\forall x\ x < S(x)\ )\}$ و $\sigma : \exists x\ S(0) < x$ در این صورت $\Gamma \models \sigma$ ولی فرمول $\beta : \exists x\ S(x) = 0$ نتیجه منطقی $\Gamma$ نیست، چراکه اگر عالم سخن را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم و بقیه پارامترها را مثل قبل تعبیر کنیم، $\Gamma$ در آن درست است و $\beta$ نیز در آن درست است، ولی اگر عالم سخن را $\mathbb{N}$ در نظر بگیریم، $\Gamma$ در آن درست است ولی $\beta$ در آن درست نیست. پس $\Gamma \not\models \beta$، یعنی $\Gamma$ منطقاً مستلزم $\beta$ نیست.

### تعریف پذیری یک رابطه دریک ساخت

رابطه $K$ موضعی $\mathfrak{R}$ در ساخت $\mathfrak{A}$ از زبان درجه اول $\mathfrak{L}$ تعریف پذیر است اگر و فقط اگر فرمولی چون $\varphi$ با $k$ متغیر آزاد در زبان $\mathfrak{L}$ چنان موجود باشد که داشته باشیم، $(a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \varphi(a_1, a_2, ..., a_k)$. یعنی فرمول $\varphi$ مادامی که متغیرهای آزادش را با هر یک از اعضای رابطه ی $\mathfrak{R}$ مقداردهی کنیم در ساخت $\mathfrak{A}$ درست باشد. به طور مثال در ساخت $(\mathbb{N}, +)$ ، رابطه محمولی دو موضعی $\leq$ قابل تعریف است. ( $((x \leq y) \Leftrightarrow (\exists m\ y = x + m)$ همچنین در این ساخت ثابت صفر توسط فرمول $\{0\} : x + x = x$ قابل تعریف است.

**تعبیرپذیری یک ساخت در ساختی دیگر**

ساخت $\mathfrak{A}$ با زبان مرتبه اول $\mathfrak{L}$ را در ساخت $\beta$ با زبان مرتبه اول $\mathfrak{L}'$ تعبیرپذیر گویند، اگر و فقط اگر :

۱− مجموعه‌ی $|\mathfrak{A}|$ در ساخت $\beta$ و توسط فرمولی در زبان $\mathfrak{L}'$ تعریف پذیر باشد. این مجموعه را $|\mathfrak{A}|_\beta$ می نامیم.

۲− هر نماد محمولی در $\mathfrak{L}$ ( ومتعاقباً در $\mathfrak{A}$ ) در $\beta$ و توسط فرمولی در زبان $\mathfrak{L}'$ روی $|\mathfrak{A}|_\beta$ تعریف پذیر باشد.

۳− هر نماد تابعی در $\mathfrak{L}$ ( ومتعاقباً در $\mathfrak{A}$ ) در $\beta$ و توسط فرمولی در زبان $\mathfrak{L}'$ روی $|\mathfrak{A}|_\beta$ تعریف پذیر باشد و در ضمن تابع نیز باشد.

۴− هر نماد ثابت در $\mathfrak{L}$ ( ومتعاقباً در $\mathfrak{A}$ ) در $\beta$ و توسط فرمولی در زبان $\mathfrak{L}'$ روی $|\mathfrak{A}|_\beta$ تعریف پذیر باشد.

**مثال ۱.۲.۳ :** $(\mathbb{Z},+)$ در $(\mathbb{N},+)$ قابل تعبیر است.

اثبات: ۱− تعریف $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{N}$ : هر عدد $z \in \mathbb{Z}$ را در $\mathbb{N}$ به صورت زوج مرتب $(a,b) \in \mathbb{N}^۲$ تعریف می کنیم که اگر $z$ مثبت باشد قدرمطلق آن را در $a$، و $b$ را مساوی صفر قرار می دهیم و اگر منفی باشد قدرمطلق آنرا در $b$، و $a$ را مساوی صفر قرار می دهیم. پس $\mathbb{Z}$ به صورت زیر در $\mathbb{N}$ تعریف می شود:

$$\circ : x + x = x$$

$$\mathbb{Z} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^۲ |\ a + a = a\ \vee\ b + b = b\ \}$$

۲− عمل جمع در $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{N}$ به شکل زیر قابل تعبیر است:

ابتدا برای ساده سازی رابطه دو موضعی $\leq$ را در $\mathbb{N}$ تعریف می کنیم. $x \leq y : \exists m\ y = x + m$

$+$ در $\mathbb{Z}$ :

$$(a_۱, b_۱) + (a_۲, b_۲) = (a_۳, b_۳) \Leftrightarrow$$

$$(a_۱ = \circ \wedge a_۲ = \circ) \Rightarrow (b_۳ = b_۱ + b_۲ \wedge a_۳ = \circ)$$

$$(b_۱ = \circ \wedge b_۲ = \circ) \Rightarrow (a_۳ = a_۱ + a_۲ \wedge b_۳ = \circ)$$

$$(b_۱ = \circ \wedge a_۲ = \circ \wedge a_۱ \geq b_۲) \Rightarrow (b_۳ = \circ \wedge a_۱ = b_۲ + a_۳)$$

$$(b_۱ = \circ \wedge a_۲ = \circ \wedge a_۱ \leq b_۲) \Rightarrow (a_۳ = \circ \wedge b_۲ = a_۱ + b_۳)$$

$$(a_۱ = \circ \wedge b_۲ = \circ \wedge b_۱ \geq a_۲) \Rightarrow (a_۳ = \circ \wedge b_۱ = a_۲ + b_۳)$$

$$(a_۱ = ۰ \wedge b_۲ = ۰ \wedge b_۱ \leq a_۲) \Rightarrow (b_۳ = ۰ \wedge a_۲ = b_۱ + a_۳)$$

### نظریه

مجموعه جملات مثل $\mathcal{T}$ از یک زبان درجه‌اول یک نظریه است اگر و فقط اگر تحت استلزام منطقی بسته باشد. یعنی به ازای هر جمله مانند $\sigma$ از زبان اگر $\sigma$ یک نتیجه منطقی $\mathcal{T}$ باشد، آنگاه $\sigma$ عضو $\mathcal{T}$ باشد. به زبان ریاضی: $\mathcal{T} \models \sigma \Rightarrow \sigma \in \mathcal{T}$. مجموعه نتایج منطقی $\Sigma$ را با $Cn\Sigma$ نشان می‌دهند، یعنی $Cn\Sigma = \{\sigma | \Sigma \models \sigma\}$. مشخصاً $Cn\Sigma$ یک نظریه است، چون اگر $\alpha$ نتیجه منطقی از $Cn\Sigma$ باشد. $(Cn\Sigma \models \alpha)$ پس در هر مدلی که $Cn\Sigma$ درست باشد، $\alpha$ نیز درست است. اما در هر مدلی که $Cn\Sigma$ درست باشد، $\Sigma$ نیز درست است. پس نتیجتاً در هر مدلی که $\Sigma$ درست باشد، $\alpha$ نیز درست خواهد بود. پس $\Sigma \models \alpha$ و این یعنی $\alpha \in Cn\Sigma$، پس $Cn\Sigma$ یک نظریه است.

### نظریه یک ساخت

به تمام جملات درست در ساخت $\mathfrak{A}$ در زبان درجه‌اول $\mathfrak{L}$، نظریه ساخت $\mathfrak{A}$ می‌گویند و آنرا با $Th\mathfrak{A}$ نمایش می‌دهند. واضح است که برای هر ساخت $\mathfrak{A}$، $Th\mathfrak{A}$ یک نظریه است چرا که اگر جمله درجه اولی مثل $\alpha$ نتیجه منطقی $Th\mathfrak{A}$ باشد (یعنی $Th\mathfrak{A} \models \alpha$) پس در هر مدلی که $Th\mathfrak{A}$ درست باشد، $\alpha$ نیز درست است و علی‌الخصوص $Th\mathfrak{A}$ در $\mathfrak{A}$ درست است. پس $\alpha$ نیز در آن درست است، پس $\alpha \in Th\mathfrak{A}$ . بعلاوه نظریه یک ساخت مثل $\mathfrak{A}$، تام است. بدین معنی که به‌ازای هر جمله ی درجه‌اول در زبان این ساخت، یا خودش ویا نقیض آن متعلق به $Th\mathfrak{A}$ است.

### تصمیم پذیری

مجموعه $\Sigma$ از جملات درجه اول در زبانی مثل $\mathfrak{L}$ تصمیم‌پذیر است اگر الگوریتم متناهی وجود داشته باشد تا به ازای هر جمله $\sigma$ در زبان $\mathfrak{L}$ بتوان تصمیم گرفت که $\sigma \in \Sigma$ یا $\sigma \notin \Sigma$.

### اصل پذیری

نظریه $\mathcal{T}$ اصل پذیر است اگر و تنها اگر یک مجموعه تصمیم پذیر از جملات مانند $\Sigma$ وجود داشته باشد که $\mathcal{T} = Cn\Sigma$.

### اصل پذیری متناهی

نظریه $\mathcal{T}$ اصل پذیر متناهی است اگر و تنها اگر یک مجموعه متناهی از جملات مانند $\Sigma_\circ$ وجود داشته باشد که $\mathcal{T} = Cn\Sigma_\circ$.

به ویژه برای یک ساخت مثل $\mathfrak{A}$ داریم:

نظریه ساخت $\mathfrak{A}$ در زبان $\mathfrak{L}$ اصل پذیر متناهی است اگر و تنها اگر مجموعه متناهی از جملات در زبان $\mathfrak{L}$ مثل $\Sigma_\circ$ موجود باشد بطوریکه داشته باشیم $Cn\Sigma_\circ = Th\mathfrak{A}$.

مثال ۴.۲.۱ : ساخت $(\mathbb{N}, \circ, S)$ اصل پذیر است. (و نه متناهیاً اصل پذیر).

مجموعه نامتناهی $\Sigma$ که اصول این ساخت را تشکیل می دهد عبارت است از :

۱− $\nexists x\ \circ = S(x)$

۲− $\forall y \forall x((S(x) = S(y)) \to (y = x))$

۳− $\forall y \exists x((y \neq \circ) \to (y = S(x)))$

۴.۱− $\forall x\ S(x) \neq x$

۴.۲− $(\forall x\ SS(x) \neq x$

۴.۳− $\forall x\ SSS(x) \neq x$

...

...

...

این مجموعه متناهی نیست ولی تصمیم پذیر است، چون جملات اصل ۴ دارای ساختار خاصی هستند. و مثلاً

می دانیم که جمله $n.۴$ به صورت $\forall x\ S^n(x) \neq x$ است.

مثالی دیگر، نظریه ساخت $(\mathbb{N}, ۰, S, <)$ اصل پذیر متناهی است و این اصول به صورت زیر هستند:

۱− $\forall y \exists x((y \neq ۰) \rightarrow (y = S(x)))$

۲− $\nexists x\ (x < ۰)$

۳− $\forall y \forall x(x = y \vee x < y \vee x > y)$

۴− $\forall y \forall x \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$

۵− $\forall y \forall x(x < y \rightarrow y \nless x \wedge x \neq y)$

۶− $\forall y \forall x((x < S(y)) \leftrightarrow (y = x \vee x < y))$

قضیه ۱.۲.۱ :

گروه بدون تاب آبلی $(G, +)$ در زبان درجه اولی که تنها پارامتر آن نماد تابعی دو موضعی $+$ باشد، ( یعنی تنها پارامتر آن عمل گروه باشد ) اصل پذیر متناهی نیست. ( درواقع با هیچ تعداد متناهی جمله در زبان درجه اول مذکور نمی توان بدون تاب بودن را منطقاً استنتاج کرد. )

اثبات:

مشخص است که تنها فرمول بسیط ممکن در این زبان به صورت $x + y = z$ است. و تنها ثابتی که در این زبان قابل تعریف است صفر این گروه است. که با فرمول $x + x = x$ تعریف می شود. اگر بخواهیم در این زبان نظریه این ساخت را اصل بندی کنیم باید مجموعه جملاتی در این زبان ارائه دهیم که اولاً گروه بودن $G$ رابرآورده سازند و ثانیاً بدون تاب بودن آنرا تضمین نمایند. قسمت اول با تعداد متناهی جمله ( که همان اصول موضوعه گروههای آبلی باشد ) محقق می شود. اما برای محقق کردن قسمت دوم باید به نحوی به این واقعیت اشاره کنیم که هیچ عضو تابی از $G$ وجود ندارد یعنی هیچ عضو غیر صفری از $G$ نیست که با تعداد متناهی عمل روی خود ( جمع با خودش ) برابر صفر شود. به عبارت دیگر این جملات باید به صورت :

$t_۱ :\ \ \forall x\ (x \neq ۰\ \rightarrow\ x + x \neq x)$

$t_۲ :\ \ \forall x\ (x \neq ۰\ \rightarrow\ x + x + x \neq x)$

...

$$t_k: \ \forall x\ (x \neq ۰ \ \rightarrow \ \underbrace{x + x + ...}_{k-times} \neq x$$

باشند. رابطه‌ی ترتیب $<$ را روی جملات $t_i$ بدین صورت تعریف می‌کنیم : $t_n < t_m \leftrightarrow n < m$. پس هر مجموعه متناهی غیر تهی از جملات $t_i$ دارای بزرگترین عضو است. (فرض کنیم چنین عضوی وجود نداشته باشد، چون این مجموعه غیر تهی است پس دارای عضوی چون $t_i$ است و چون طبق فرض خلف $t_i$ بزرگترین عضو این مجموعه نیست پس عضو دیگری چون $t_j$ از این مجموعه وجود دارد که $t_i < t_j$. ولی $t_j$ نیز طبق فرض بزرگترین عضو این مجموعه نیست پس $t_k$ ای عضو این مجموعه وجود دارد که ...، با ادامه همین روند زنجیره نامتناهی ... $t_i < t_j < t_k <$ از اعضای این مجموعه تشکیل می شود که مخالف فرض متناهی بودن آن است. پس فرض خلف غلط است و این مجموعه دارای بزرگترین عضو است.) فرض کنیم بزرگترین عضو این مجموعه $t_k$ باشد با در نظر گرفتن $\mathbb{Z}_{k+۱}$ مدلی برای این مجموعه متناهی از جملات که در آن عنصری مثل $x$ از مشخصه‌ی $k + ۱$ است، داریم که اولاً گروه آبلی است ( شرط اول را برآورده می کند.)

و ثانیاً دارای عضوی تاب دار است. ( یعنی شرایط ثانویه را برآورده نمی کند ) پس هر گروه آبلی بدون تابی اصل پذیر متناهی نیست.

## رابطه بازگشتی

رابطه $k$ موضعی $\mathfrak{R}$ روی اعداد طبیعی بازگشتی است اگر مجموعه متناهی از جملات درجه اول مثل $\Sigma_۰$ وجود داشته باشد که به ازای هر $k$تایی مرتب ازاعداد طبیعی مثل $(a_۱, ..., a_k)$ داشته باشیم :

$(a_۱, ..., a_k) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \Sigma_۰ \models (a_۱, ..., a_k) \in \mathfrak{R}$. یعنی $(a_۱, ..., a_k)$ عضو $\mathfrak{R}$ است اگر و فقط اگر بتوان این عضویت را از مجموعه جملات $\Sigma_۰$ منطقاً استنتاج نمود. به طور شهودی این تعریف مدعی است که رابطه‌ی $\mathfrak{R}$ بازگشتی است، اگر بتوان دستوری متناهی برای تصمیم گیری در مورد عضویت هر $k$تایی مرتب در $\mathfrak{R}$ ارائه کنیم و در واقع بازگشتی بودن معادل صحیح و دقیق مفهوم تصمیم پذیر بودن است. (این واقعیت به تز چرچ معروف است ).

تابع $\mathfrak{f}$ محاسبه پذیر است اگر به عنوان یک رابطه، بازگشتی باشد. پس مفهوم محاسبه پذیر بودن چیزی جز مفهوم بازگشتی بودن نیست که برای توابع به کار می رود.

مثال ۵.۲.۱: تابع $+$ در ساخت $(\mathbb{N}, ۰, S, +)$ به صورت زیر اصل بندی یا به عبارت دیگربه صورت بازگشتی محاسبه می شود :

$$A_۱ : \forall x \ ۰ + x = x$$

$$A_۲ : \forall x \forall y \ S(y) + x = S(x + y)$$

برای درک این مطلب که چرا تابع جمع با جملات بالا محاسبه پذیر است، طبق تعریف باید ثابت کنیم که تابع دو موضعی جمع به عنوان یک رابطه سه موضعی بازگشتی است. یعنی به ازای هر سه تایی $(a, b, c)$ از اعداد طبیعی با استفاده‌از جملات بالا می توان تصمیم گرفت که آیا $c = a + b$ درست است یا خیر. به طور مثال می توان نشان داد که سه تایی مرتب $(۲, ۱, ۳)$ توسط جملات $A_۱, A_۲$ عضو رابطه جمع تصمیم گیری می شوند. طبق $A_۱$ داریم $S(۰) = ۱ + ۰$ و طبق $A_۲$ داریم $(۱ + ۰)S = ۱ + (۰)S = ۱ + ۱$ که با قراردادن مقداری که در ابتدا برای $۰ + ۱$ محاسبه شده در رابطه دوم داریم: $S^۲(۰) = S(S)(۰) = ۱ + ۱$ با ادامه این روند داریم : $S^۳(۰) = S(S^۲)(۰) = S(۱ + ۱) = S(۱) + ۱ = ۱ + ۲$ اما $۳ = S^۳(۰)$ پس $(۲, ۱, ۳)$ عضو رابطه جمع است.

یا تابع ضرب $\times$ در ساخت $(\mathbb{N}, ۰, S, +, \times)$ با جملات $M_۱, M_۲$ به صورت بازگشتی زیر قابل تعیین است:

$$M_۱ : \forall x \ ۰ \times x = ۰$$

$$M_۲ : \forall x \forall y \ S(y) \times x = y \times x + x$$

به طور کلی تابع $\mathfrak{f}$ محاسبه پذیر یا معادلاً به صورت بازگشتی تعیین پذیر است اگر داشته باشیم :$\mathfrak{f}(۰) = S^a(۰)$ و $\forall y \quad \mathfrak{f}(S(y)) = \mathfrak{R}(\mathfrak{f}(y))$ که در آن $\mathfrak{R}$ تابعی بازگشتی است.

### شمارش پذیر بازگشتیانه

رابطه $\mathfrak{Q}$ شمارش پذیر بازگشتیانه است اگر و فقط اگر دامنه یک رابطه بازگشتی مثل $\mathfrak{R}$ باشد یعنی $\overline{a} \in \mathfrak{Q} \leftrightarrow \exists b(\overline{a}, b) \in \mathfrak{R}$.

### سلسله مراتب حسابی

رابطه $\mathfrak{R}$ را یک رابطه بازگشتی روی اعداد طبیعی در نظر بگیرید در این صورت رده های زیر از روابط روی اعداد طبیعی قابل تعریفند:

$\Delta_1^0 : \{\overrightarrow{a} | \Gamma_0 \models \mathfrak{R}(\overrightarrow{a})\}$ در واقع $\Delta_1^0$ رده تمام روابط بازگشتی است.

$\Sigma_1^0 : \{\overrightarrow{a} | \exists b(\overrightarrow{a}, b) \in \mathfrak{R}\}$ در واقع $\Sigma_1^0$ رده تمام روابطی است که دامنه ی یک رابطه ی بازگشتی باشند.

$\Pi_1^0 : \{\overrightarrow{a} | \nexists b(\overrightarrow{a}, b) \in \mathfrak{R}\} = \{\overrightarrow{a} | \forall b(\overrightarrow{a}, b) \notin \mathfrak{R}\} = \{\overrightarrow{a} | \forall b(\overrightarrow{a}, b) \in \mathfrak{R}'\}$

اگر $\mathfrak{R}$ یک رابطه بازگشتی باشد متمم آن نیز یک رابطه بازگشتی چون $\mathfrak{R}'$ است. در واقع $\Pi_1^0$ رده تمام روابطی است که متم دامنه یک رابطه ی بازگشتی باشند.

$\Sigma_2^0 : \{\overrightarrow{a} | \exists b_2 \forall b_1 (\overrightarrow{a}, b_1, b_2) \in \mathfrak{R}\}$

...

$\Sigma_k^0 : \{\overrightarrow{a} | \exists b_k \forall b_{k-1} \exists b_{k-2} ... (\overrightarrow{a}, b_k, b_{k-1}, ..., b_1) \in \mathfrak{R}\}$

$\Pi_k^0 : \{\overrightarrow{a} | \forall b_k \exists b_{k-1} \forall b_{k-2} ... (\overrightarrow{a}, b_k, b_{k-1}, ..., b_1) \in \mathfrak{R}\}$

در این زنجیره به ازای هر $k \geq 1$ داریم : $\Sigma_k^0 \bigcap \Pi_k^0 = \Delta_k^0$ و $\Sigma_k^0 \bigcup \Pi_k^0 = \Delta_{k+1}^0$ ونیز برای هر $i < k$ داریم: $\Delta_i^0 \subseteq \Sigma_i^0 \subseteq \Pi_k^0$ و $\Delta_i^0 \subseteq \Pi_i^0 \subseteq \Sigma_k^0$.

# فصل دوم

# $FA$—نمایش پذیری

## ۱.۲ $FA$—نمایش پذیری

یک ساخت از یک زبان با نمادهای متناهی $FA$—نمایش پذیر است اگر و فقط اگر اولاً الفبایی مثل $\Sigma$ وجود داشته باشد که عناصر این ساخت توسط دنباله های متناهی روی $\Sigma$ در یک زبان منظم مثل $\mathfrak{D}$ قابل نمایش باشند( $\mathfrak{D} \subseteq \Sigma^*$ ) و ثانیاً درستی هر فرمول اتمی برای هر یک چندتایی مرتب از اعضای این ساخت تصمیم پذیر کارآمد باشد، یعنی اتوماتونی متناهی بتواند درستی رابطه های اتمی که به وسیله زبان مرتبه اول برای این مجموعه نمادها داده شده‌اند را برای چندتایی از عناصر این ساخت مثل $(u_1, ..., u_k)$ بیازماید. برای آزمودن روابط اتمی، کلمات نشان دهنده هر یک از $u_i$ها که خود مؤلفه ای از ورودی است، زیر یکدیگر نوشته می شوند و از پشته علائم که زیر مجموعه ای از $\Sigma \cup \{\diamondsuit\}$ است استفاده می شود. مانند آنچه در زیر آمده است:

$$\begin{array}{cc} a & c \\ b & b \\ c & \diamondsuit \end{array}$$

می توان با اضافه کردن نشانه $\diamondsuit$ به انتهای هر رشته نمایشی، هر مجموعه متناهی از این رشته ها را با هم هم‌طول کرد.

توجه به این مطلب اساسی است، که اگر اعضای یک ساختِ $FA$—نمایش پذیر دارای چند نمایش در زبانِ منظمِ $\mathfrak{D}$ باشند، آنگاه اتوماتونی متناهی می‌تواند تصمیم بگیرد که آیا دو رشته‌ی متفاوت، نمایشی برای یک عضو هست یا خیر؟ یعنی رابطه‌ی هم‌ارزی، نمایش یک عضو بودن توسط این اتوماتون تصمیم‌گیری می‌شود.

مثال ۱.۲ : چرا $(\mathbb{N}, +)$، $FA$—نمایش پذیر است؟

ما اعداد را به صورت دو دویی، به کوتاه ترین فرم خود می نویسیم. ( یعنی صفرهای سمت راست را حذف می کنیم، چراکه اعدادمان را از راست به چپ ( برعکس حالت معمول ) می نویسیم. چون طبق قرارداد اتوماتونها ورودی خود را از چپ به راست می خوانند.) و به جای عدد صفر، از رشته تهی ( $\diamondsuit$ ) استفاده می کنیم. بنابراین الفبایی که‌اعضای ساختِ مان را روی آن نمایش می دهیم $\Sigma = \{۰, ۱\}$ است. دامنه زبانمان شامل همه رشته‌هایی از $\Sigma^*$ است که به یک ختم می شوند. طبق قرارداد عدد صفر با رشته تهی نمایش داده می شود. یک اتوماتون متناهی می‌تواند درستی جمع را که از طریق رویه معمولی بیت نقلی انجام می پذیرد، بیازماید و معین کند چه جایی بیت نقلی به سمت راست انتقال پیدا می کند. $\diamondsuit$ مانند صفر عمل می کند. برای مثال پذیرنده صحت و سقم معادله ۲۷ = ۵ + ۲۲ را با پذیرش این معادله به عنوان یک رشته ورودی تحقیق می کند. این پذیرنده دارای سه وضعیت $N$ ( بیت نقلی ندارد )، $C$ ( بیت نقلی دارد ) و $A$ ( وضعیت پذیرش نهایی ) می‌باشند. $N$ وضعیت اولیه است که تابع انتقال آن در مثال ۲.۱.۱ از فصل مقدمات کلی تشریح شده است.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۱ | $\diamondsuit$ | $\diamondsuit$ | $\diamondsuit$ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | $\diamondsuit$ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | $\diamondsuit$ |

### ۱.۱.۲ قضایایی در باب ساختهای $FA$—نمایش پذیر

قضیه ۱.۲ :

الف: هر ساخت متناهی $\mathfrak{F}$، $FA$—نمایش پذیر است.

ب: هر ضرب متناهی از ساخت های $FA$—نمایش پذیر ، $FA$—نمایش‌پذیر است.

اثبات:

الف: کافی است $\Sigma$ را $|\mathfrak{F}|$ درنظر بگیریم. پس هر عضو $\mathfrak{F}$ توسط یک نماد از $\Sigma$ نمایش داده می شود و در واقع زبان $\mathfrak{D}$ که اعضای $\mathfrak{F}$ را در آن نمایش می دهیم همان $\Sigma$ است. پس $\mathfrak{D}$ متناهی است ( چون $\mathfrak{F}$ متناهی است) و بنابراین $\mathfrak{D}$ منظم است. حال باید نشان دهیم هر رابطه اتمی در $\mathfrak{F}$ را به ازای هر عضو آن می توان توسط یک اتوماتون متناهی آزمود. چون $|\mathfrak{F}|$ متناهی است پس هر رابطه در ساخت $\mathfrak{F}$ نیز متناهی است. پس برای آزمودن رابطه ای مثل $\mathfrak{R}$ در$\mathfrak{F}$ کافی است تمام کلماتی که در $\mathfrak{R}$ هستند به حالت پذیرش نهایی و متمم آنها به حالت رد برود، بنابراین هر رابطه ی اتمی در$\mathfrak{F}$ قابل آزمودن با اتوماتون است. یعنی طبق تعریف $\mathfrak{F}$، $FA$—نمایش پذیر است .

ب: ابتدا ثابت می کنیم که اگر $\mathfrak{F}_1$ و $\mathfrak{F}_2$ دو ساخت $FA$—نمایش پذیر باشند آنگاه $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ نیز $FA$—نمایش پذیر است. قرار می دهیم $\Sigma = |\mathfrak{F}_1| \times |\mathfrak{F}_2|$. چون این دو ساخت $FA$—نمایش پذیر هستند، پس $\Sigma$ نیز منظم است. مجموعه روابط اتمی ساخت $\mathfrak{F}_1$ و $\mathfrak{F}_2$ به صورت $(\alpha(a_1, ..., a_n), \beta(b_1, ..., b_m))$ است که در آن $\alpha$ رابطه‌ای اتمی از ساخت $\mathfrak{F}_1$ و $\beta$ رابطه ای اتمی از ساخت $\mathfrak{F}_2$ است. چون هر دوی این ساختها $FA$—نمایش پذیر هستند پس به ازای هر $\overrightarrow{a} \in |\mathfrak{F}_1|$ و $\overrightarrow{b} \in |\mathfrak{F}_2|$ اتوماتونی هست که درستی $\alpha(\overrightarrow{a})$ و $\beta(\overrightarrow{b})$ را بیازماید. با اجتماع گیری از وضعیتهای این دو اتوماتون، اتوماتونی خواهیم داشت که به ازای هر فرمول اتمی $(\alpha, \beta)$ درستی $(\alpha, \beta)(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ را بیازماید. پس درستی هر فرمول اتمی در $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ به ازای هر چندتایی از $|\mathfrak{F}_1| \times |\mathfrak{F}_2|$ توسط این اتوماتون قابل تصمیم گیری است. یعنی $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ $FA$—نمایش پذیر است. و بنابراین با استقراء می توان ثابت کرد که حاصلضرب هر تعداد متناهی از ساختهای $FA$—نمایش پذیر، $FA$—نمایش پذیر است.

قضیه ۲.۲ ( خاصیت تفحص ارزیابی ):

نظریه ی یک ساخت $FA$—نمایش پذیر، تصمیم پذیر است.

اثبات:

فرض کنیم $\mathfrak{F}$ یک ساخت $FA$—نمایش پذیر باشد. همانطور که در فصل مقدمات بیان شده است، مجموعه فرمولهای خوش ساخت در زبان $\mathfrak{F}$ مجموعه پدید آمده از فرمولهای اتمی توسط نمادهای منطقی است. پس اثبات را به استقراء روی فرمولهای خوش ساخت مربوط به $\mathfrak{F}$ انجام می دهیم. چون $\mathfrak{F}$ یک ساخت $FA$—نمایش پذیر است پس هر فرمول اتمی مربوط به زبان $\mathfrak{F}$ به ازای هر چندتایی مرتب از اعضای $|\mathfrak{F}|$ تصمیم پذیر است. فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ فرمول درست ساختی باشند که به ازای هر چندتایی مرتب از $|\mathfrak{F}|$ درستی آنها تصمیم پذیر باشد ( فرض استقراء ). حال باید نشان دهیم که درستی فرمولهای $\neg\alpha$ و $\alpha \to \beta$ و $\exists x\alpha(x)$ نیز به ازای هر چندتایی مرتب از اعضای $|\mathfrak{F}|$ تصمیم پذیر است. به ازای هر چندتایی مرتب مثل $(a_1, ..., a_n)$، $\neg\alpha$ درست است اگر و فقط اگر $\alpha(a_1, ..., a_n)$ در ساخت $\mathfrak{F}$ غلط باشد. نیز به ازای هر $(a_1, ..., a_n)$، $\alpha \to \beta$ درست است اگر و فقط اگر $(\neg\alpha \vee \beta)(a_1, ..., a_n) \models_{\mathfrak{F}}$ برقرار باشد. اما برای تصمیم پذیری $\exists x \quad \alpha(x)$ از معادل بودن $NFA$ و $DFA$ استفاده می کنیم. یعنی اتوماتون غیر قطعی‌ای را برای حدس ( جستجوی متناهی ) $x_0$ ای بکار می بریم و به ازای آن تحقیق می کنیم که $\alpha(x_0)$ درست است یا خیر. پس با یک اتوماتون غیر قطعی می توانیم درستی $\exists x\alpha(x)$ را تصمیم بگیریم. از آنجایی که برای هر فرمول خوش ساخت دیگر می توان فرمول خوش ساخت معادلی با استفاده از ترکیب متناهی از این سه نماد منطقی تولید نمود پس تصمیم پذیری در مورد درستی آنها نیز با تصمیم پذیری درستی این سه نماد اثبات می گردد. بنابراین می توان به ازای هر جمله در زبان مربوط به ساخت $\mathfrak{F}$ مشخص نمود که این جمله درست است یا غلط. بنابراین نظریه ی این ساخت، تصمیم پذیر است.

تعابیر و تصمیم پذیری:

تعبیرپذیری ساختی مثل $\mathfrak{B}$ در ساختی دیگر مثل $\mathcal{A}$ در فصل مقدمات توضیح داده شده است. مع ذالک دراینجا اشاره ای اجمالی به آن مفاهیم می کنیم. در یک گویش تقریبی ساخت $\mathfrak{B}$ درساخت $\mathcal{A}$ قابل تعبیر است اگر اعضای $|\mathfrak{B}|$ را بتوان بوسیله چندتایی مرتب یک رابطه قابل تعریف مثل $E_{\mathfrak{B}}$ در $\mathcal{A}$ نمایش داد، بطوریکه رابطه تساوی در $\mathfrak{B}$ تبدیل به یک رابطه تساوی روی $E_{\mathfrak{B}}$ گردد و نیز دیگر روابط اتمی روی $\mathfrak{B}$ به عنوان زیر مجموعه هایی از $E_{\mathfrak{B}}$ در $\mathcal{A}$ تعریف پذیر باشند.

قضیه ۳.۲ : اگر ساخت $\mathfrak{B}$ قابل تعبیر در ساخت $FA$—نمایش پذیر $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه ساخت $\mathfrak{B}$ نیز $FA$—نمایش

پذیر است.

اثبات :

چون $\mathfrak{B}$ در $\mathcal{A}$ تعبیر پذیر است، پس فرمول درجه اولی مثل $\varphi_{\mathfrak{B}}$ در زبان ساخت $\mathcal{A}$ وجود دارد که اعضای $|\mathfrak{B}|$ را در $\mathcal{A}$ نمایش می دهد. (یعنی $\varphi_{\mathfrak{B}}$، رابطه ی $E_{\mathfrak{B}}$ را در ساخت $A$ تعریف می کند.) به عبارت دیگر چندتایی $(b_۱, ..., b_m)$ نمایش عضوی مثل $b$ از $|\mathfrak{B}|$ در $\mathcal{A}$ است اگر و فقط اگر داشته باشیم $b \in |\mathfrak{B}| \Leftrightarrow \models_A \varphi_{\mathfrak{B}}(b_۱, ..., b_m)$. یعنی هر یک از اعضای $|\mathfrak{B}|$ را می توان بوسیله‌ی $m$تایی ای از اعضای $|\mathcal{A}|$ که اعضایی از رابطه $E_{\mathfrak{B}}$ نیز هستند، نمایش داد. چون ساخت $\mathcal{A}$، $FA-$نمایش پذیر است طبق قضیه تفحص ارزیابی $\varphi_{\mathfrak{B}}$ در ساخت $\mathcal{A}$ تصمیم پذیر است. و لذا رابطه ی تساوی در $\mathfrak{B}$ تبدیل به رابطه تساوی در ساخت $\mathcal{A}$ روی مجموعه‌ی $E_{\mathfrak{B}}$ می گردد. چون اعضای $|\mathfrak{B}|$ در ساخت $\mathcal{A}$ توسط $m$تایی های مرتب از اعضای این ساخت نمایش پذیرند ونیز رابطه ی تساوی در ساخت $\mathfrak{B}$، به یک رابطه تساوی تصمیم پذیر توسط فرمول $\varphi_{\mathfrak{B}}$ در ساخت $\mathcal{A}$ بدل می گردد، پس این $m$تایی های عضو $E_{\mathfrak{B}}$ یک $FA-$نمایش برای اعضای $|\mathfrak{B}|$ هستند. به علاوه چون هر رابطه اتمی $k$ موضعی مثل $\mathfrak{R}$ در ساخت $\mathfrak{B}$ توسط فرمولی چون $\psi_{\mathfrak{R}}$ با $k \times m$ متغیر آزاد، در $\mathcal{A}$ تعبیر می شود و نیز ساخت $\mathcal{A}$ طبق فرض $FA-$نمایش پذیر است، پس طبق قضیه تفحص ارزیابی به‌ازای هر $k \times m$تایی از اعضای $\mathcal{A}$، $\psi_{\mathfrak{R}}$ در $\mathcal{A}$ تصمیم پذیر است. به علاوه همانطور که در پاراگراف قبل توضیح داده شد، چون رابطه $E_{\mathfrak{B}}$ در ساخت $\mathcal{A}$ تصمیم پذیر است، پس برای هر $k$تایی از اعضای $E_{\mathfrak{B}}$ می توان مشخص کرد که $\psi_{\mathfrak{R}}$ درست است یا خیر. یعنی به طور خلاصه تعبیر هر رابطه اتمی مثل $\mathfrak{R}$ در ساخت $\mathcal{A}$ تصمیم پذیر است. چون هر یک از اعضای $\mathfrak{B}$ دارای یک $FA-$نمایش از $m$تایی های مرتب از اعضای $\mathcal{A}$ است و نیز هر رابطه‌ی اتمی در $\mathfrak{B}$ معادلی تصمیم پذیر در ساخت $\mathcal{A}$ دارد می توان نتیجه گرفت که ساخت $\mathfrak{B}$، $FA-$نمایش پذیر است.

مثال ۲.۲:مجموعه‌ی اعداد حقیقی را به صورت ساختی مثل $(\mathbb{R}, +, .)$ در نظر بگیرید. نشان می دهیم که

$(GL_n(\mathbb{R}), +, \times)$

(که در آن $GL_n(\mathbb{R})$ مجموع تمام ماتریسهای $n \times n$ای است که دترمینان آنها غیرصفر است و منظور از $+$ و $\times$ در این ساخت جمع و ضرب ماتریسهاست) در ساخت $(\mathbb{R}, +, .)$ تعبیر پذیر است.

ابتدا تعریف $GL_n(\mathbb{R})$ در ساخت $(\mathbb{R},+,.)$ :

هر ماتریس $n \times n$ را می توان با $n^۲$ تایی مرتب مشخص کرد و نیز دستوری برحسب جمع و ضرب $\mathbb{R}$ برای محاسبه جمع و ضرب دو ماتریس $n \times n$ وضع نمود. چون جمله $det(U) \neq ۰$ در زبان ساخت $\mathbb{R}$ قابل بیان است پس مجموعه $GL_n(\mathbb{R})$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ در ساخت $\mathbb{R}$ تعریف پذیر است.

جمع دو ماتریس $n \times n$ در واقع جمع درایه به درایه دو $n^۲$تایی مرتب است و ضرب آنها نیز با عمل جمع و ضرب $\mathbb{R}$ چنین تعریف می شود:

$$(u_{۱۱}, u_{۱۲}, ..., u_{۱n}, ..., u_{n۱}, ..., u_{nn}) = (a_{۱۱}, ..., a_{۱n}, ..., a_{n۱}, ..., a_{nn}) \times (b_{nn}, ..., b_{۱n}, ..., b_{n۱}, ..., b_{nn})$$

$$\Leftrightarrow \forall\ i, j\ \ (۱ \leq i, j \leq n)\ \ u_{ij} = a_{i۱}.b_{۱j} + a_{i۲}.b_{۲j} + ... + a_{in}.b_{nj}$$

پس طبق آنچه در مورد تعبیر یک ساخت در ساخت دیگر در فصل مقدمات ذکر گردید $(GL_n(\mathbb{R}), +, \times)$ در$(\mathbb{R}, +, .)$ تعبیرپذیر است.

## ۲.۲ $FA$−نمایش پذیری ضعیف

ساخت $\mathfrak{A}$ را ضعیفاً $FA$−نمایش پذیر گوئیم اگر رابطه تساوی و نیز هر رابطه اتمی $K$−موضعی این ساخت به ازای هر $k$تایی از عناصر این ساخت تصمیم پذیر کارآمد باشند. یعنی اتوماتونی متناهی موجود باشد که به ازای هر رابطه اتمی $k$ موضعی مثل $\mathfrak{R}$ از $\mathfrak{A}$ به هر $k$تایی مرتب از اعضای $\mathfrak{A}$ مشخص کند که $\mathfrak{R}(u_۱, u_۲, ..., u_n)$ در ساخت $\mathfrak{A}$ درست است یا خیر. در مقایسه به $FA$−نمایش پذیری، $FA$−نمایش پذیری ضعیف فقط شرط اینکه اعضای $\mathfrak{A}$ در زبان منظمی چون $\mathfrak{L}$ روی الفبای متناهی چون $\Sigma$ نمایش پذیر باشند را کم دارد. به‌عبارت دیگر اگر اعضای ساخت $\mathfrak{A}$ دارای چند نمایش مختلف باشند، برای اثبات $FA$−نمایش پذیری ضعیفِ ساخت $\mathfrak{A}$ لازم نیست روشی کارآمد برای تصمیم در مورد تساوی دو نمایش مختلف ارائه دهیم.

### ۱.۲.۲ تعریف $\mathfrak{F}^\omega$ برای ساختی چون $\mathfrak{F}$

ساخت $\mathfrak{F}$ را در نظر بگیرید. ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ از روی $\mathfrak{F}$ چنین تعریف می شود:

الف) $|\mathfrak{F}^\omega| = \{g : \mathbb{N} \to |\mathfrak{F}| | \ \ g \ \ is \ \ almost \ \ constant.\ \}$ یعنی می توان اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ را به صورت دنباله های متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ در نظر گرفت. بدین ترتیب که هر عضو $g \in \mathfrak{f}^\omega$ (که نوعاً تابعی نامتناهی ولی تقریباً ثابت است، یعنی فقط تعداد متناهی از اعضای آن متمایزند و این به نوبه‌ی خود ایجاب می‌کند که از جایی به بعد $g$ ثابت باشد) را بصورت $(g_۱, g_۲, ..., g_n)$ نمایش دهیم، بطوری که $g_{n-۱} \neq g_n$ وبه ازای هرعدد طبیعی بزرگتر از $n$ مقدار$g$ به عنوان یک تابع برابر$g_n$ باشد.

ب) به ازای هر نماد تابعی یک موضعی $\mathfrak{f}$ ، در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ ، تابع $\mathfrak{f}^{\mathfrak{F}^\omega}$ در ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ از روی تابع $\mathfrak{f}^{\mathfrak{F}}$ در ساخت $\mathfrak{F}$ چنین تعریف می شود:

به ازای هر عضو $u$ از $|\mathfrak{F}^\omega|$ که در واقع دنباله متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ است، ( $u = (a_۱, ..., a_n)$ ) داریم:

$$\mathfrak{f}^{\mathfrak{F}^\omega}(u) = \mathfrak{f}^{\mathfrak{F}^\omega}(a_۱, ..., a_n) = (\mathfrak{f}^{\mathfrak{F}}(a_۱), \mathfrak{f}^{\mathfrak{F}}(a_۲), ..., \mathfrak{f}^{\mathfrak{F}}(a_n)) \in |\mathfrak{F}^\omega|.$$

برای توسیع این تعریف برای نماد $k$ موضعی $\mathfrak{f}_k$ در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ باید عناصر $u_۱$ تا $u_k$ از $\mathfrak{F}^\omega$ که دنباله های متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ هستند را باهم هم طول کنیم. برای این کار از روی دنباله های متناهی $u_۱$ تا $u_k$ طول بیشین ( ماکسیمال ) را مشخص می کنیم، یعنی اگر نماد $|u_i|$ را طول دنباله‌ی $u_i$ در نظر بگیریم و فرض کنیم طول بیشین $u_۱$ تا $u_k$، $m$ است داریم $|u_i| \leq m$ برای هر $i$ که $۱ \leq i \leq k$. برای هم طول کردن $u_i$ها، طول هر $u_j$ای که اندازه اش از $m$ کوچکتر است را با تکرار آخرین عضو آن، به $m$ می رسانیم. در این صورت دنباله های $u_۱$ تا $u_k$ هم طول و طول آنهابرابر $m$ خواهد شد. حال برای نماد $k$ موضعی $\mathfrak{f}_k$ در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ داریم:

$$\mathfrak{f}_k^{\mathfrak{F}^\omega}(u_۱, ..., u_k) = \mathfrak{f}^{\mathfrak{F}^\omega}((a_۱ ۱, ..., a_۱ m), (a_۲ ۱, ..., a_۲ m), ..., (a_k ۱, ..., a_k m))$$

$$= (\mathfrak{f}_k^{\mathfrak{F}}(a_۱ ۱, ..., a_k ۱), \mathfrak{f}_k^{\mathfrak{F}}(a_۱ ۲, ..., a_k ۲), ..., \mathfrak{f}_k^{\mathfrak{F}}(a_۱ m, ..., a_k m)).$$

ج) به ازای هر نماد محمولی $k$موضعی، $\mathfrak{R}_k$ در زبان ساخت $\mathfrak{F}$ ، رابطه‌ی $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}$ در ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ از روی رابطه‌ی $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}$ در ساخت $\mathfrak{F}$ چنین تعریف می شود:

$$\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}(u_1, ..., u_k) = \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^\omega}((a_1 1, ..., a_1 m), (a_2 1, ..., a_2 m), ..., (a_k 1, ..., a_k m))$$

$$= \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 1, ..., a_k 1) \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 2, ..., a_k 2) \wedge ... \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 m, ..., a_k m).$$

**قضایایی در باب ساختهای $\mathfrak{F}^\omega$**

قضیه ۴.۲ : برای هر ساخت متناهی $\mathfrak{F}$، $\mathfrak{F}^\omega$، $FA-$نمایش پذیر است.

طبق تعریف ساختهای $FA-$نمایش پذیر برای اثبات این قضیه باید اولاً نشان دهیم که اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ را می توان به وسیله زبانی منظم روی الفبایی متناهی چون $\Sigma$ نمایش داد و ثانیاً نشان دهیم رابطه تساوی و دیگر روابط اتمی ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ به طور کارآمد تصمیم پذیرند.

الف) اثبات قسمت اولاً: چون ساخت $\mathfrak{F}$ متناهی است پس طبق قضیه ۱.۲ الف، $FA-$نمایش پذیر است. این بدان معناست که هر یک از اعضای ساخت $\mathfrak{F}$ را می توان در زبانی منظم مثل $\mathfrak{L}_0$ روی الفبایی متناهی مثل $\Sigma_0$ نمایش داد. اعضای $\mathfrak{F}^\omega$، دنباله های متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ هستند. یک اتوماتون متناهی می تواند با جستجویی متناهی تصمیم بگیرد که جمله $\sigma : (\forall n\ \exists a \in \mathfrak{F}\ \ S.T\ \ g(n) = a) \quad \wedge \quad (|g| = m \Rightarrow g(m) \neq g(m-1)$ برای دنباله‌ای چون $g$ درست است یا خیر. یعنی می تواند مشخص کند که $g \in \mathfrak{F}^\omega$ است یا نه. توجه کنید که هر دو سور این جمله مقید هستند. سور اولی که واضحاً مقید است، چرا که $g$ دنباله‌ای متناهی است، پس اگر$|g|$ را طول دنباله ی $g$ در نظر بگیریم، سورِبرایِ هر$n$ در حقیقت برایِ هر $n \leq |g|$ است. در مورد سور دوم ( سور وجودی ) هم چون مجموعه $|\mathfrak{F}|$ متناهی است پس سور روی آن مقید است. توجه به این نکته از این نظر حائز اهمیت است که تنها جملاتی که با سور مقید هستند می توانند توسط یک اتوماتون متناهی تصمیم گیری شوند، چراکه مجموعه‌ی وضعیت‌های یک اتوماتون متناهی است. با فرض اینکه $\Sigma_0$ فاقد نمادی چون $\diamondsuit$ باشد، می توان $\Sigma_1$ را برابر $\Sigma_0 \cup \{\diamondsuit\}$ قرار داد. پس دنباله‌ای چون $(a_1, a_2, ..., a_n)$ را می‌توان به صورت $r_{a_1}\diamondsuit r_{a_2}\diamondsuit ... \diamondsuit r_{a_n}$ نمایش داد که در آن $r_{a_i}$ نمایش عضو $a_i$ از ساخت $\mathfrak{F}$ در زبان منظم $\mathfrak{L}_0$ روی الفبای متناهی $\Sigma_0$ است. چون $\mathfrak{L}_0$ منظم است پس اتوماتونی چون $\mathfrak{M}$ می تواند تصمیم بگیرد که $r_{a_i}$ نمایش عضوی چون $a_i$ از $\mathfrak{F}$ هست یا خیر. پس

همین اتوماتون ( با کمی تغییر ) می تواند مشخص کند $r_{a_1}\Diamond r_{a_2}\Diamond ... \Diamond r_{a_n}$ عضوی از ساخت $\mathfrak{F}^{\omega}$ هست یا خیر.

ب) اثبات قسمت ثانیاً: چون ساخت $\mathfrak{F}$ متناهی است پس $FA$ـنمایش پذیر است. طبق تعریف ساختهای $FA$ـنمایش پذیر اتوماتونی چون $\mathfrak{M}$ چنان موجود است که به ازای هر رابطه‌ی اتمی $k$ موضعی $\mathfrak{R}^{\mathfrak{F}}$ و $k$تایی مرتب از اعضای $\mathfrak{F}$ مثل $(a_1, ..., a_k)$ تصمیم بگیرد که $\mathfrak{R}^{\mathfrak{F}}(a_1, ..., a_k)$ در $\mathfrak{F}$ درست است یا خیر. مطابق آنچه که در تعریف ساخت $\mathfrak{F}^{\omega}$ گفته شد، رابطه اتمی $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^{\omega}}$ برای هر $k$تایی از اعضای این ساخت مثل $(u_1, ..., u_k)$ معادل جمله

$$\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^{\omega}}(u_1, ..., u_k) = \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 1, ..., a_k 1) \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 2, ..., a_k 2) \wedge ... \wedge \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}}(a_1 m, ..., a_k m)$$

است. طبق خاصیت تفحص ارزیابی، اتوماتون $\mathfrak{M}$ می تواند تصمیم بگیرد که این جمله در ساخت $\mathfrak{F}$ درست است یا خیر. پس این اتوماتون می تواند تصمیم بگیرد که $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^{\omega}}$ به ازای هر $k$تایی از اعضای $\mathfrak{F}^{\omega}$ مثل $(u_1, ..., u_k)$ درست است یا خیر. یعنی هر رابطه اتمی $\mathfrak{R}_k^{\mathfrak{F}^{\omega}}$ در ساخت $\mathfrak{F}^{\omega}$ تصمیم پذیر کارآمد است.

رابطه دو موضعی تساوی نیز در این ساخت تصمیم پذیر است. چراکه برای دو دنباله متناهی چون $(u_1, ..., u_m)$ و $(w_1, ..., w_n)$ که در آن $m \geq n$ ،بافرض اینکه $r_{w_i}$ و $r_{u_i}$ به ترتیب دنباله های نمایشی $w_i$و$u_i$ روی الفبای $\Sigma_1$ باشند، داریم :

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{W} \Leftrightarrow r_{u_1} = r_{w_1} \ \wedge \ r_{u_2} = r_{w_2} \ \wedge ... \wedge \ r_{u_n} = r_{w_n} \ \wedge \ r_{u_n} = r_{w_{n+1}} \ \wedge ... \wedge \ r_{u_n} = r_{w_m}$$

چون هررابطه‌ی تساوی بین اعضای $\mathfrak{F}^{\omega}$ را می‌توان معادل با جمله‌ای نظیر جمله‌ی درجه اول فوق در $\mathfrak{F}$ قرار داد ونیز چون هر جمله‌ی درجه اول در $\mathfrak{F}$ طبق خاصیت تفحص ارزیابی تصمیم پذیر است پس اتوماتون $\mathfrak{M}$ میتواند رابطه ی تساوی در $\mathfrak{F}^{\omega}$ را نیز تصمیم بگیرد.

توجه کنید که‌طبق تعریف $\sigma : g \in |\mathfrak{F}^{\omega}| \Leftrightarrow [\ (\ \forall n\ \exists a \in \mathfrak{F}\ \ g(n) = a\ ) \quad \wedge \quad (\ |g| = m \Rightarrow g(m) \neq g(m-1)\ )\ ]$ اعضای $\mathfrak{F}^{\omega}$ را مشخص می کند. قبلاً اشاره کردیم که سورِ وجودی رویِ اعضای $|\mathfrak{F}|$ فقط وقتی توسط اتوماتون (غیر قطعی) قابل تشخیص است که مقید باشد. یعنی این سور نمادی از جستجوی متناهی در اعضای $|\mathfrak{F}|$ باشد. برای روشن شدن این مطلب، فرض کنید ساخت $\mathfrak{F}$ متناهی باشد، جمله $\sigma$ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sigma : g \in |\mathfrak{F}^\omega| \Leftrightarrow (\forall n \ \ g(n) = a_۱) \vee (\forall n \ \ g(n) = a_۲) \vee ... \vee (\forall n \ \ g(n) = a_m)$$

که $|\mathfrak{F}| = \{a_۱, .., a_m\}$. پس به طور کلی هم‌ارزی دونمایشِ عنصری از $\mathfrak{F}^\omega$ برای یک ساخت نامتناهی $\mathfrak{F}$ توسط اتوماتون متناهی قابل تصمیم نیست. مگر اینکه زیر مجموعه ای از $\mathfrak{F}^\omega$ را در نظر بگیریم که سور وجودی در جمله $\sigma$ را مقید کند و در نتیجه هم‌ارزی نمایش‌های اعضای آن قابل تصمیم توسط اتوماتونی متناهی باشد. مثلاً نمایش اعضایی از $\mathfrak{F}^\omega$ که از جایی به بعد مقدار ثابتی چون $a \in |\mathfrak{F}|$ دارند، قابل تشخیص توسط اتوماتون متناهی هستند. یعنی $g_a = \{g \in |\mathfrak{F}^\omega| | \forall n \geq N_۰ \ \ g(n) = a \ \}$ قابل تشخیص توسط اتوماتون متناهی است. ولی قابل تشخیص بودن هم‌ارزی نمایش‌های اعضای یک ساخت برای اتوماتونی متناهی فقط شرط لازم برای $FA-$ نمایش‌پذیری آن ساخت را فراهم می آورد، یعنی برای $FA-$نمایش پذیری زیر ساختی از $\mathfrak{F}^\omega$ که در آن $\mathfrak{F}$ ساختی نامتناهی و $FA-$نمایش پذیر است، علاوه بر تشخیص پذیری اعضای آ ن باید توابع و روابط اتمی ساخت $\mathfrak{F}$ در آن تصمیم پذیر باشند. تعریف و قضیه ی زیربصورت دقیقتری این موضوع رابررسی می نماید.

اگر ساخت $\mathfrak{F}$ ساختی نامتناهی و $FA$ـنمایش پذیر باشد آنگاه ساخت $\mathfrak{F}^\omega_S$ زیر ساختی از $\mathfrak{F}^\omega$ است که به صورت $\mathfrak{F}^\omega_S = \{g : \mathbb{N} \to |\mathfrak{F}| \ | \ \ \exists N_۰ \in \mathbb{N} \ \forall n > N_۰ \ \ \exists a \in S \ \ g(n) = a\}$ تعریف می شود، و در آن $S$ زیر مجموعه ای متناهی از $|\mathfrak{F}|$ است. در واقع در اینجا نیز می‌توان $\mathfrak{F}^\omega_S$ را مجموعه‌ی تمام دنباله های متناهی از اعضای $\mathfrak{F}$ در نظر گرفت که به اعضایی چون $g_n \in S$ ختم می‌شوند. به عبارت دیگر می‌توان گفت $\mathfrak{F}^\omega_S = \{g \in |\mathfrak{F}^\omega| | \ \ \ |g| = n \ \Rightarrow \ g_n \in S \subseteq |\mathfrak{F}|\}$.

نتیجه‌ی قضیه‌ی ۴.۲:

ساخت $\mathfrak{F}^\omega_S$، $FA-$نمایش پذیر است اگر وفقط اگر مجموعه‌ی متناهی $S$ تحت روابط و توابع اتمی ساخت $\mathfrak{F}$ بسته باشد.

اثبات این مطلب مانند قضیه‌ی ۴.۲ است.

قضیه‌ی ۵.۲ : اگر ساخت $\mathfrak{F}$ نامتناهی و $FA$ـنمایش پذیر باشد، آنگاه ساخت $\mathfrak{F}^\omega$ ضعیفاً $FA$ـنمایش پذیر است.

اثبات این مطلب هم کاملاً مثل اثبات قضیه ۴.۲ است، با این تفاوت که در قسمت اول آن، جمله $\sigma$ که معرف

اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ است توسط اتوماتون متناهی تصمیم پذیر نیست، چراکه سور وجودی در آن مقید نیست( چون مجموعه $|\mathfrak{F}|$ نامتناهی است). پس نمی توان $FA$ـنمایشی برای اعضای $\mathfrak{F}^\omega$ از روی نمایش اعضای $\mathfrak{F}$ بدست آورد.

گروه $R_k$ به صورت زیر تعریف می شود:

$R_k = \mathbb{Z}[۱/k] = \{zk^{-i}|z \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\}$ در واقع این گروه چیزی جز چندجمله‌ای هایی با ضرائب صحیح نیستند که در آنها متغیر $x$ را با $۱/k$ مقداردهی کرده‌ایم. و نیز گروه $\mathbb{Z}(K^\infty)$ با معادله $\mathbb{Z}(K^\infty) = R_k/\mathbb{Z}$ تعریف می‌شود.

بر حسب تعاریف فوق احکام زیر را داریم:

۱− گروه $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_m$ که اعضای آن دنباله های متناهی از $\mathbb{Z}_m$ است و عمل جمع روی آن مولفه به مولفه صورت می گیرد، $FA$ـنمایش پذیر است.

۲− گروه پروفر[۱] یا همان $\mathbb{Z}(K^\infty)$، $FA$ـنمایش پذیر است.

۳− گروه $R_k$ برای هر $k \in \mathbb{Z}$، $FA$ـنمایش پذیر است.

اثبات ۱: گروه $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_m$ را می توان به صورت $(\mathbb{Z}_m)^\omega$ در نظر گرفت چون گروه $(\mathbb{Z}_m, +)$ یک ساخت متناهی است پس طبق قضیه‌ی ۴.۲، $(\mathbb{Z}_m)^\omega$، $FA$ـنمایش پذیر است.

اثبات ۲:

گروه $\mathbb{Z}(K^\infty)$ را می توان به صورت چند جمله‌ای هایی با ضرائب صحیح که مقدار ثابت آنها صفر است در نظر گرفت که در آنها متغیر $x$ را با $۱/k$ مقداردهی کرده‌ایم. یعنی می‌توان $\mathbb{Z}(K^\infty) = (\mathbb{Z}[x]/\mathbb{Z})|_{x=۱/k}$ در نظر گرفت که معادل‌است با گروه $(\mathbb{Z}_۰)^\omega$ که طبق تعریفی که در بالا برای $\mathfrak{R}_S^{\mathfrak{F}^\omega}$ کردیم عبارت است از همه دنباله های متناهی از اعضای $\mathbb{Z}$ که از جایی به بعد صفر هستند. از آنجا که $\{۰\}$ نسبت به عمل گروه بسته است، طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی ۴.۲ این ساخت $FA$ـنمایش پذیر است.

البته اثباتی که در مقاله اصلی برای این قضیه ذکر شده است، اثباتی مستقیم است که آوردن آن در اینجا خالی از لطف نیست.

[۱] Prufer

ابتدا فرض کنید که $k=۲$. الفبای $\Sigma=\{۰,۱,\diamondsuit\}$ را در نظر می گیریم. مانند آنچه در مورد مثال ۱.۲ در ابتدای این فصل گفته شد اعضای این ساخت با رشته های دودویی که به ۱ ختم می شوند نمایش داده می شوند. (دقیقاً مثل ساخت $(\mathbb{N},+)$) با این تفاوت که در اینجا اولین رقم معنی دار، اول می آید. برای مثال رشته ی ۱ ۰ ۰ عدد ۱/۸ را نمایش می‌دهد. مثل گذشته رشته تهی، صفر را نمایش می دهد. یک اتوماتون متناهی صحت جمع را که از طریق روال بیت انتقالی صورت گرفته می تواند بیازماید. توجه داشته باشید که در اینجا بیت انتقالی به سمت چپ می رود. چپ ترین بیت نقلی نادیده گرفته می شود. به طور مثال این اتوماتون $[۱/۸]=[۱/۲]+[۵/۸]$ را به وسیله پذیرش رشته زیر تحقیق می کند.

$$\begin{array}{ccc} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & \diamondsuit & \diamondsuit \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{array}$$

بنابراین برای $\mathbb{Z}(K^\infty)$ الفبای این اتوماتون $\{۰,...,k-۱,\diamondsuit\}$ است.

اثبات ۳:

گروه $R_k$ برای هر $k\in\mathbb{Z}$ را می توان به صورت $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}(K^\infty)$ در نظر گرفت. در مثال ۱.۲ نشان دادیم که $(\mathbb{N},+)$، $FA$ـنمایش پذیر است و نیز در مثال ۳.۲.۱ در فصل گذشته نشان دادیم که ساخت $(\mathbb{Z},+)$ در ساخت $(\mathbb{N},+)$ تعبیرپذیر است. پس طبق قضیه ی ۳.۲ $(\mathbb{Z},+)$، $FA$—نمایش پذیر است. به علاوه در قسمت ۲ همین مثال نشان دادیم که $\mathbb{Z}(K^\infty)$، $FA$ـنمایش پذیر است. طبق قضیه‌ی ۱.۲ ب، ضرب هر دو ساخت $FA$ـنمایش پذیر، $FA$ـنمایش پذیر است. چون $R_k=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}(K^\infty)$ ، پس $R_k$، $FA$ـنمایش پذیر است.

در اینجا مثل قسمت ۲ مقاله اصلی اثباتی مستقیم ولی نسبتاً طولانی را در حالت خاص $k=۳$ آورده است. که در اینجا اشاره مختصری به آن می کنیم: می توان $FA$ـنمایش هایی را برای $(\mathbb{N},+)$ و $\mathbb{Z}(K^\infty)$ به انضمام هم بکار برد، ولی این بار بدون نادیده گرفتن چپ ترین بیت نقلی. می توان از دو رویکرد استفاده نمود که رویکرد اول برای قسمت صحیح بوسیله نمایش باینری است و رویکرد دوم برای قسمت کسری است. برای مثال اگر $k=۳$ باشد، آنگاه عنصر $۱۴+۱۷/۲۷$ به وسیله رشته زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{array}{cccc} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & \diamondsuit \end{array}$$

هنگام جمع کردن ، بیت نقلی برای قسمت کسری به چپ می رود ولی برای قسمت صحیح به راست می رود.

برای مثال اتوماتون $14\frac{17}{27} + 1\frac{2}{3} = 16\frac{8}{27}$ را به وسیله رشته زیر تحقیق می کند:

◊ ۱ ۱ ۱ ۰ ( نمایش عدد ۱۴ در مبنای دو که از راست به چپ نوشته شده‌است )

◊ ◊ ۲ ۲ ۱ ( نمایش عدد ۱۷/۲۷ در مبنای سه که از چپ به راست نوشته شده‌است )

---

◊ ◊ ◊ ◊ ۱ (نمایش عدد ۱ در مبنای دو که از راست به چپ نوشته شده‌است)

◊ ◊ ◊ ◊ ۲ (نمایش عدد ۲/۳ در مبنای سه که از چپ به راست نوشته شده‌است)

---

۱ ۰ ۰ ۰ ۰ (نمایش عدد ۱٦ در مبنای دو که از راست به چپ نوشته شده‌است)

◊ ◊ ۲ ۲ ۰ (نمایش عدد ۸/۲۷ در مبنای سه که از چپ به راست نوشته شده‌است)

درنهایت می توان یک $FA$ـنمایش برای $R_k$ از طریق ضرب ساخت دو گروه بدست آورد.

**$FA$ـنمایش ناپذیری**

قضیه‌ی ٦.۲: ساخت های $(\mathbb{Q}, .)$ و $(\mathbb{Z}, .)$ $FA$ـنمایش پذیر نیستند.

اگر $(\mathbb{N}, +)^r$ در ساختی مثل $\mathfrak{A}$ گنجانده شود، (تعبیر شود) آنگاه تعداد حالات اتوماتون متناهی (غیر قطعی) که ساخت $\mathfrak{A}$ را $FA$ـنمایش می دهد، (یعنی این اتوماتون به ازای هر فرمول درجه اول با $k$ متغیر آزاد و هر $k$تایی مرتب از اعضای $\mathfrak{A}$ تصمیم می گیرد که این فرمول به ازای این $k$تایی در ساخت $\mathfrak{A}$ درست است یاخیر) ضریبی از $r$ خواهد بود. از آنجا که $(\mathbb{N}, +)^r$ به ازای هر $r \in \mathbb{N}$ در ساخت $(\mathbb{Z}, .)$ گنجانده می شود، پس اگر $(\mathbb{Z}, .)$ توسط اتوماتونی متناهی $FA$ـنمایش داشته باشد، تعداد حالات این اتوماتون از هر عدد طبیعی بزرگتر است. و این متناقض با تعریف اتوماتون متناهی است. ( چراکه اتوماتون متناهی باید تعداد حالات متناهی داشته باشد )

برای درک اینکه چرا $(\mathbb{N},+)^r$ به ازای هر $r \in \mathbb{N}$ در ساخت $(\mathbb{Z},.)$ گنجانده می شود، توجه کنید که تابعی چون $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ با ضابطه $f(n) = k^n$ که در آن $k$ عددی صحیح و مثبت است، یک تک‌ریختی از ساخت $(\mathbb{N},+)$ به ساخت $(\mathbb{Z},.)$ است. چراکه این تابع عمل جمع را حفظ می کند یعنی اگر $a + b = c$ به ازای اعداد $a, b, c \in \mathbb{N}$ در ساخت $(\mathbb{N},+)$ درست باشد، آنگاه معادله‌ی $f(a).f(b) = f(c)$ به ازای اعداد $f(a), f(b), f(c) \in \mathbb{Z}$ در ساخت $(\mathbb{Z},.)$ درست است چراکه داریم : $f(a).f(b) = k^a.k^b = k^{a+b} = k^c = f(c)$. چون به ازای هر عدد $k$ی صحیح مثبت چنین نگاشتِ یک به یکی (چرا که داریم : $f(a) = f(b) \Rightarrow k^a = k^b \Rightarrow Ln(k^a) = Ln(k^b) \Rightarrow a = b$ ) یک تک ریختی از ساخت $(\mathbb{N},+)$ به ساخت $(\mathbb{Z},.)$ است، پس $(\mathbb{Z},.)$ حاوی تعداد نامتناهی زیر ساخت، همریخت با $(\mathbb{N},+)$است همین استدلال را می توان در مورد ساخت $(\mathbb{Q},.)$ نیز بکاربست و نشان داد که $(\mathbb{Q},.)$ نیز حاوی تعداد نامتناهی زیرساخت، همریخت با $(\mathbb{N},+)$ است لذا نمی توان برای آن $FA$ـنمایشی بدست آورد.

### قضایایی در باب ضعیفاً $FA$–نمایش پذیری

قضیه‌ی ۷.۲:

ساخت $(\mathbb{Q},+)$، $FA$–نمایش پذیر ضعیف است.

اثبات:

مطابق تعریف $\mathfrak{F}^{\omega}$ برای ساخت $\mathfrak{F}$، $(\mathbb{Q},+)$ را می توان $(\mathbb{Z},+)^{\omega}$ در نظر گرفت پس طبق قضیه ۵.۲ $(\mathbb{Q},+)$ $FA$ـنمایش پذیر ضعیف است. ( چراکه ساخت $(\mathbb{Z},+)$ ساختی نامتناهی و $FA$ـنمایش پذیر است ).

در مقاله اصلی این قضیه با معرفی یک $FA$ـنمایش ضعیف از $(\mathbb{Q},+)$ مستقیماً اثبات شده است، که ذکر آن در اینجا خالی از لطف نیست.

مثال ۳.۲ : یک $FA$ـنمایش ضعیف برای ساخت $(\mathbb{Q},+)$:

هر عدد $p \in \mathbb{Q}$ را می توان به صورت $p = z + q$ در نظر گرفت که در آن ۱ $> (q \in \mathbb{Q}) \leq$ ۰ $,z \in \mathbb{Z}$. هر کسر

$1 > (q \in \mathbb{Q}) \geq 0$ را می توان به صورت یک بسط فاکتوریلی منحصربه فرد به صورت $q = \Sigma_{i=2}^{N} a_i/i!$ در نظر گرفت که در آن $a_i$ عدد طبیعی است بطوریکه $0 \leq a_i < i$. برای روشن شدن اینکه هر کسر واقعی $q$ را می توان بدین صورت در نظر گرفت، فرض کنید $q = n/m$ در این صورت خواهیم داشت $q = \frac{n.(m-1)!}{m.(m-1)!} = \frac{n.(m-1)!}{m!}$ فرض کنیم $r = n.(m-1)!$ در این صورت $r < m \vee r \geq m$ . اگر $r < m$ باشد نمایش طبق شرایط آن بدرستی صورت گرفته است. ولی اگر $r \geq m$ طبق لم تقسیم داریم $r = s.m + t$ که در آن $0 \leq t < m$ پس داریم $q = \frac{r}{m!} = \frac{(s.m+t)}{m!} = \frac{s}{(m-1)!} + \frac{t}{m!}$ با تکرار همین روند برای $\frac{s}{(m-1)!}$، نمایش شرح داده شده در بالا را برای هر عدد $q$ بدست می آوریم. پس به طور خلاصه می توان گفت که هر عدد $p \in \mathbb{Q}$ را می توان به صورت $(z, q)$ که در آن $z \in \mathbb{Z}, 0 \leq (q \in \mathbb{Q}) < 1$ نمایش داد.

به علاوه چون $q = \Sigma_{i=2}^{N} a_i/i!$ پس به صورت دقیقتر می توان گفت $p = (z, \Sigma_{i=2}^{N} a_i/i!)$.

عمل جمع برای دو عدد $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}$ مولفه به مولفه صورت می گیرد. یعنی داریم :

$p_1 + p_2 = (z_1, \Sigma_{i=2}^{N} a_i/i!) + (z_2, \Sigma_{i=2}^{N} b_i/i!) = (z_1 + z_2, \Sigma_{i=2}^{N} (a_i + b_i)/i!) = (z_3, \Sigma_{i=2}^{N} d_i/i!) = p_3$ جمع بسط های فاکتوریلی که در بالا نمایش داده شده است به صورت طبیعی انجام می‌گیرد. یعنی داریم $\Sigma_{i=2}^{N} (a_i + b_i)/i! = \Sigma_{i=2}^{N} a_i/i! + \Sigma_{i=2}^{N} b_i/i!$ بافرض اینکه در محل $i$ام این دنباله ( که $2 \leq i \leq N$ ) ما یک بیت نقلی $c_{i+1}$ داشته باشیم، داریم : $d_i = c_{i+1} + a_i + b_i$ اگر و فقط اگر $c_{i+1} + a_i + b_i < i$ و $c_i = 0$ و در غیر اینصورت داریم:$d_i = c_{i+1} + a_i + b_i - i$ و $c_i = 1$ . با بکار بستن این روش می توان جمع دو سری متناهی $\Sigma_{i=2}^{N} a_i/i!$ و $\Sigma_{i=2}^{N} b_i/i!$ را با استفاده از یک اتوماتون متناهی انجام داد. بنابراین می توان درستی جمع $p_3 = p_1 + p_2$ را توسط اتوماتونی متناهی آزمود. لذا ساخت $(\mathbb{Q}, +)$ ضعیفاً $FA$ـنمایش پذیر است.

# فصل سوم

# ساختارهای جبری $FA$ـنمایش پذیر

## ۱.۳ قضایای $FA$ـنمایش پذیری در باب گروههای آبلی

قضیه ۱.۳:

اگر گروه آبلی $\mathcal{A}$ دارای یک زیر گروه $FA$ـنمایش پذیر چون $\mathfrak{B}$ باشد به طوری که اندیس $\mathfrak{B}$ در $\mathcal{A}$ متناهی باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ نیز $FA$ـنمایش پذیر است.

اثبات:

مجموعه هم دسته های $\mathfrak{B}$ در $\mathcal{A}$ را در نظر بگیرید. چون طبق فرض اندیس $\mathfrak{B}$ در $\mathcal{A}$ متناهی است، پس تعداد اعضای این مجموعه متناهی خواهد بود. یعنی داریم $\{a\mathfrak{B}|a \in \mathcal{A}\} = \{e\mathfrak{B}, a_۱\mathfrak{B}, ..., a_n\mathfrak{B}\}$ که در آن $a_i \notin \mathfrak{B}$. چون $\mathcal{A}$ آبلی فرض شده پس هر زیر گروه آن نرمال است. یعنی مجموعه‌ی این هم دسته ها با عمل ضرب القاء شده از $\mathcal{A}$ تشکیل یک گروه می دهند، که طبق فرض متناهی است. اما طبق قضیه ۱.۲ الف هر ساخت متناهی، $FA$ـنمایش پذیر است پس گروه هم دسته های زیر گروه $\mathfrak{B}$، $FA$ـنمایش پذیر است. می دانیم که رابطه هم دسته بودن در $\mathcal{A}$ یک رابطه هم ارزی است پس هر عضو از $\mathcal{A}$ فقط در یک هم

دسته‌ی $\mathfrak{B}$ قرار دارد. و نیز $\mathcal{A} = e\mathfrak{B} \cup a_1\mathfrak{B} \cup ... \cup a_n\mathfrak{B}$. فرض کنیم عضوی چون $a \in \mathcal{A}$ متعلق به هم دسته $a_i\mathfrak{B}$ است. یعنی به ازای $b \in \mathfrak{B}$ داریم $a = a_ib$ پس هر عضو $\mathcal{A}$ مثل $a$ را می توان به صورت منحصر به فرد بصورت $(a_i, b)$ نمایش داد که در آن $a_i \in \{e, a_1, ..., a_n\}$ و $b \in \mathfrak{B}$ است. (یعنی $a = a_ib \Leftrightarrow a = (a_i, b)$).
ثابت می‌کنیم چنین نمایشی برای اعضای $\mathcal{A}$ خوش تعریف است یعنی، اگر برای $a_1 = (a_i, b_1)$ و $a_2 = (a_j, b_2)$ و $a_3 = (a_k, b_3)$ ، داشته باشیم $a_1.a_2 = a_3$ آنگاه $(a_k, b_3) = (a_i.a_j, b_1.b_2) = (a_i, b_1).(a_j, b_2) = a_1.a_2$.
طبق فرض داریم $a_1 = a_i.b_1$ و $a_2 = a_j.b_2$ پس $a_1.a_2 = a_i.b_1.a_j.b_2$ چون $\mathcal{A}$ گروه آبلی است پس این معادله به صورت $a_1.a_2 = a_i.a_j \ . \ b_1.b_2$ در می آید. اما طبق فرض $a_1.a_2 = a_3$ و $a_3 = a_k.b_3$ پس داریم $a_1.a_2 = (a_i.a_j).(b_1.b_2) = a_k.b_3 = a_3$ پس خواهیم داشت $a_i.a_j.a_k^{-1} = b_3.(b_1.b_2)^{-1}$ همانطور که در بالا توضیح داده شد، مجموعه $\{a_i, e\}$ که در آن $i$ هر عدد $1 \le i \le n$ است، تشکیل یک گروه می دهد. (این گروه $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{B}}$ یعنی همان گروه هم دسته‌های $\mathfrak{B}$ است.) به ازای هر $i$، $a_i \notin \mathfrak{B}$ یعنی $\{a_i, e\} \cap \mathfrak{B} = \{e\}$. چون $a_i.a_j.a_k^{-1} = b_3.(b_1.b_2)^{-1}$ پس $a_i.a_j.a_k^{-1} \in \{a_i, e\} \cap \mathfrak{B} = \{e\}$ پس $a_i.a_j.a_k^{-1} = e$ یعنی $a_i.a_j = a_k$ و نیز به همین صورت $b_3 = b_1.b_2$. این خوش‌تعریفی ثابت می‌کند که عمل ضرب گروه $\mathcal{A}$ قابل تبدیل به عمل ضرب مولفه به مولفه در نمایش $(a_i, b)$ی هر عضو $\mathcal{A}$ است. یعنی $a_1.a_2 = (a_i, b_1).(a_j, b_2) = (a_i.a_j, b_1.b_2)$ و این نتیجه می دهد که $\mathcal{A}$ را می‌توان به صورت $\{e, a_1, a_2, ..., a_n\} \times \mathfrak{B}$ در نظر گرفت. طبق قضیه ی ۱.۲ ب حاصلضرب دو ساخت (گروه) $FA$ـنمایش پذیر، $FA$ـنمایش پذیر است. در بالا ثابت کردیم که گروه $\{e, a_i\}$ $FA$ـنمایش پذیر است ( چون متناهی است )، و نیز طبق فرض $\mathfrak{B}$ نیز گروهی $FA$ـنمایش پذیر است، پس $\mathcal{A}$ که حاصلضرب این دو است، $FA$ـنمایش پذیر است.

قضیه ۲.۳ :

فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو زیر گروه $FA$ـنمایش پذیر از گروهی آبلی چون $G$ باشند. در این صورت گروه $\mathcal{A}.\mathfrak{B}$ یک گروه $FA$ـنمایش پذیر است به شرط آنکه مجموعه $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ تصمیم پذیر کارآمد باشد. ( یعنی اعضای آن توسط یک اتوماتون متناهی تشخیص داده شوند).

اثبات:

چون $G$ گروهی آبلی است، پس گروه $\mathcal{A}.\mathfrak{B}$ که به صورت $\mathcal{A}.\mathfrak{B} = \{xy | x \in \mathcal{A}, y \in \mathfrak{B}\}$ یک زیر گروه از گروه $G$ است و می توان هر گروه $\mathcal{A}.\mathfrak{B}$ را به صورت زوج مرتبی چون $(a, b)$ نمایش داد که در آن $a \in \mathcal{A}, b \in \mathfrak{B}$ ولی با این طرز نمایش از اعضای گروه $\mathcal{A}.\mathfrak{B}$، اعضایی که در $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ هستند، دارای چند نمایش می شوند، که رابطه تساوی برای این نمایشهای مختلف از یک عضو قابل تصمیم گیری نیست. برای درک این مطلب فرض کنید $u, v \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ باشد چون $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ خود یک گروه است $uv$ نیز عضوی از $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ است. ولی این عنصر (یعنی $uv$) دارای دو نمایش متفاوت $(u, v)$ و $(v, u)$ خواهد بود. مشخص است که $(u, v) = (v, u)$ چراکه $u.v = v.u$، ولی عمل ضربی که در این جمله به کار رفته است ضرب دو عضو از گروه $G$ است که معلوم نیست تصمیم پذیر باشد. در ضمن این ضرب نمی تواند به عنوان ضربِ گروه $\mathcal{A}$ یا گروه $\mathfrak{B}$ در نظر گرفته شود چراکه مثلاً در طرف چپ تساوی ( یا در طرف راست آن ) شاهد ضرب دو عضو از یکی از این گروهها نیستیم. ولی می توان با حذف این اشتراکات از یکی از این دو گروه تضمین نمود که اشتراک $\mathcal{A}$ با گروه $\mathfrak{B}'$ ( که از حذف $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ از $\mathfrak{B}$ بدست می آید )، تنها، عنصر همانی است. یعنی $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}' = \{e\}$ و در این صورت می توان هر عنصر $\mathcal{A}.\mathfrak{B}'$ را به صورت منحصر به فرد توسط زوج مرتبها نمایش داد. و به علاوه $\mathcal{A}.\mathfrak{B}'$ شامل تمام اعضای $\mathcal{A}.\mathfrak{B}$ می شود. برای این منظور چون $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ زیر گروهی نرمال از $\mathfrak{B}$ است ( چون گروه $G$ آبلی است هر زیر گروه آن، نرمال است ) $\mathfrak{B}'$ را برابر $\frac{\mathfrak{B}}{\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}}$ قرار می دهیم. در این صورت همه‌ی اعضایی از $\mathfrak{B}$ که در $\mathcal{A}$ نیز هستند، برابر $e$ خواهند شد. طبق قضیه دوم ایزومورفیسم داریم : $\frac{\mathcal{A}.\mathfrak{B}}{\mathcal{A}} \cong \frac{\mathfrak{B}}{\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}} \;\Rightarrow\; \mathcal{A}.\mathfrak{B} \cong \mathcal{A} \times \frac{\mathfrak{B}}{\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}}$ چون طبق فرض $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ تصمیم‌پذیر کارآمد است پس مجموعه‌ی $\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}}$، $FA$ـنمایش پذیر است. حال چون $\mathfrak{B}$، $FA$ـنمایش پذیر است، پس هر یک از اعضای آن روی الفبای متناهی چون $\Sigma_{\mathfrak{B}}$ در زبان منظم $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ قابل نمایش است. نمایش $\mathfrak{B}'$ را از روی نمایش گروه $\mathfrak{B}$ چنین می سازیم، که برای هر عضو $x \in \mathfrak{B}$ طبق فرض می توان به طور کارآمد مشخص کرد که $x \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ یا خیر. اگر $x \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ باشد آنگاه $x$ را با دنباله نمایشِ $e$ از گروه $\mathfrak{B}$ نمایش می دهیم. و در غیر این صورت $x$ را با دنباله نمایش خودش در $\mathfrak{B}$ نمایش می دهیم. در این صورت اعضای $\mathfrak{B}'$ در زبان منظمی چون $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{B}}$ که زیر مجموعه $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ است، قابل نمایش است. چون $\mathfrak{B}$، $FA$ـنمایش پذیر است، پس طبق تعریف $FA$ـنمایش پذیری، عمل ضرب گروه برای نمایش اعضای $\mathfrak{B}$ در زبان $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ تصمیم پذیر

است. پس متعاقباً عمل ضرب در گروه $\mathfrak{B}'$ برای نمایش اعضای $\mathfrak{B}'$ در $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$، تصمیم پذیر است. یعنی $\mathfrak{B}'$، $FA$ـنمایش‌پذیر است. چون $\mathcal{A}.\mathfrak{B} = \mathcal{A} \times \mathfrak{B}'$ و نیز چون هر دو گروه $\mathcal{A}$ و $\mathfrak{B}'$، $FA$ـنمایش پذیرند پس طبق قضیه‌ی ۱.۲ ب، حاصلضرب آنها که همان گروه $\mathcal{A}.\mathfrak{B}$ است، نیز $FA$ـنمایش پذیر است.

تعریف گروههای $< p^{-\infty}a >$ :

فرض کنید $e_۰$ و $e_۱$ اعضای پایه‌ی استاندارد برای $\mathbb{Q}^۲$ باشند و نیز $p_۱, p_۲, q$ اعداد اول متمایزی باشند و $a \in \mathbb{Q}^۲$، در این صورت گروه تولید شده توسط مجموعه $\{ap^{-i} | i \in \mathbb{N}\}$ را که همان $\mathfrak{R}_p$ است به صورت $< p^{-\infty}a >$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۳:

۱ــ گروه $< p_۱^{-\infty}e_۰, p_۲^{-\infty}e_۱ >$ $FA$ـنمایش پذیر است.

۲ــ گروه $< p_۱^{-\infty}e_۰, p_۲^{-\infty}e_۱, q^{-\infty}(e_۰ + e_۱) >$ $FA$ـنمایش پذیر است.

اثبات ۱:

در واقع هر یک از گروههای $< p_i^{-\infty}e_j >$ در واقع حلقه‌ی چند جمله‌ای ها با ضرائب صحیح است که در آنها متغیر $x$ با $۱/(p_i)$ مقدار دهی شده است. یعنی $< p_i^{-\infty}e_j > \cong \mathbb{Z}[x]|_{x=۱/p_i}$ طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی ۴.۲ این معادل است با $\mathbb{Z}_۰^{\omega}[۱/p_i]$ که $FA$ـنمایش پذیر است. پس هر یک از گروههای $< p_۱^{-\infty}e_۰ >, < p_۲^{-\infty}e_۱ >$ $FA$ـنمایش پذیر است. ولی برای اثبات آنکه گروه تولید شده بوسیله هر دو این گروه‌ها خود $FA$ـنمایش پذیر است از قضیه‌ی ۱.۳ استفاده می کنیم. چون هر یک از این گروه ها در $< p_۱^{-\infty}e_۰, p_۲^{-\infty}e_۱ >$ دارای اندیس متناهی ۲ است، پس طبق این قضیه $< p_۱^{-\infty}e_۰, p_۲^{-\infty}e_۱ >$ $FA$ـنمایش پذیر است.

توجه کنید که هر عضو $< p^{-\infty} >$ در واقع نمایش عدد گویایی چون $r$ در مبنای $p$ است. چراکه داریم $r = a_۰ + a_۱/p + a_۲/p^۲ + ... + a_n/p^n$ و در نتیجه گروه $\mathfrak{R}_p$ مجموعه تمام اعداد گویایی است که دارای بسط متناهی در مبنای $p$ هستند. به علاوه توجه کنید که اگر عدد $۰ < r < ۱$ در مبنای عدد اول $p_۱$ دارای بسط متناهی باشد، آنگاه این عدد در مبنای عدد اول دیگری چون $p_۲$ دارای بسط نامتناهی است. برای روشن شدن این مطلب فرض کنید $۰ < r < ۱$ نمایش متناهی در مبنای $p_۱$ داشته باشد یعنی

داریم $r = a_1/p_1 + a_2/p_1^2 + ... + a_n/p_1^n = z_1/p_1^n$ که در آن $z_1/p_1^n$ از مخرج مشترک گیری کسرهای $a_1/p_1 + a_2/p_1^2 + ... + a_n/p_1^n$ به دست آمده است و لذا $z_1 \in \mathbb{Z}$. حال بر خلاف ادعا، فرض کنید که $r$ در مبنای عدد اول دیگری چون $p_2$ نیز دارای بسط متناهی باشد طبق توضیحات بالا داریم، $r = z_2/p_2^m$ پس خواهیم داشت $r = z_2/p_2^m = z_1/p_1^n$ که در آن $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, 0 < r < 1$ با طرفین وسطین کردن این رابطه تساوی داریم $(z_2)p_1^n = (z_1)p_2^m$ پس $p_1^n|(z_1)p_2^m$ چون $p_1, p_2$ اول در نظر گرفته شده اند پس نسبت به هم اول هستند. پس داریم $p_1^n|(z_1)$ بنابراین $z_1/p_1^n \geq 1$ اما این همان نمایش عدد $0 < r < 1$ طبق فرض بود، بنابراین فرض خلف باطل و ادعا اثبات می گردد. لذا $\mathfrak{R}_{p_1} \cap \mathfrak{R}_{p_2} = \mathbb{Z}$. (یعنی $r = 0$).

اثبات ۲:

اگر $\mathcal{A} =< p_1^{-\infty}e_0, p_2^{-\infty}e_1 >$ و $\mathfrak{B} =< q^{-\infty}(e_0 + e_1) >$ قرار دهیم آنگاه طبق توضیحات بالا $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(e_0 + e_1)$ یعنی $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}$ تصمیم پذیر کارآمد است پس طبق قضیه ۲.۳ گروه $< p_1^{-\infty}e_0, p_2^{-\infty}e_1, q^{-\infty}(e_0 + e_1) >$، $FA$ـنمایش پذیر است.

توجه به این نکته اساسی است که نمی‌توانستیم این قضیه را با استفاده از قضایای مربوط به ساختهای $FA$ـنمایش پذیر و نیز قضیه‌ی ۱.۳ اثبات کنیم.

### ۱.۱.۳ قضایای $FA$ـنمایش پذیری در باب گروه‌های ناآبلی

تعریف: فرض کنید $\mathcal{C}$ خاصیتی در مورد گروهها باشد، گروه $G$ را موضعاً $\mathcal{C}$ متناهی گوییم اگر و فقط اگر $G$ دارای زیر گروه نرمالی با خاصیت $\mathcal{C}$ مثل $\mathcal{H}$ باشد بطوریکه اندیس $\mathcal{H}$ در $G$ متناهی است. بنابراین گروه $G$ را موضعاً آبلی متناهی می گوییم اگر $G$ دارای زیر گروه نرمالِ آبلی‌ای با اندیسی متناهی در $G$ باشد.

قضیه ۳.۳ :

هر گروه $G$ که متناهی التولیدِ موضعاً آبلی متناهی باشد، $FA$ـنمایش پذیر است.

اثبات:

اثبات این قضیه دقیقاً مثل قضیه‌ی ۱.۳ است به شرط آنکه ثابت کنیم $G$ دارای زیرگروهی $FA$ـنمایش پذیر با اندیس متناهی است. چون $G$ موضعاً آبلی متناهی است، پس دارای زیر گروه نرمال آبلی چون $\mathfrak{B}$ است که اندیس آن در $G$ متناهی است. چون $G$ متناهی التولید است پس $\mathfrak{B}$ نیز چنین است. حال طبق قضیه‌ی رده بندی گروههای آبلی متناهی التولید، $\mathfrak{B}$ ایزومورف با گروهی چون $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{m_1} \times .... \times \mathbb{Z}_{m_n}$ است که در آن $m$ و $m_i$ها اعدادی طبیعی هستند. گروه $(\mathbb{Z}^m, +)$ (بنابر آنچه که در مثال ۱.۲ آمده و نیز تعبیرپذیری $(\mathbb{Z}^m, +)$ در $((\mathbb{N}, +)$ $FA$ـنمایش پذیر است. و نیز گروه $\mathbb{Z}_{m_1} \times .... \times \mathbb{Z}_{m_n}$ نیز متناهی است و بنابراین $FA$ـنمایش پذیر است. طبق قضیه ی ۱.۲ ب ضرب دو گروه $FA$ـنمایش پذیر، $FA$ـنمایش پذیر است. پس در کل $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{m_1} \times .... \times \mathbb{Z}_{m_n}$ $FA$ـنمایش پذیر است و متعاقب آن $\mathfrak{B}$، $FA$ـنمایش پذیر است. بقیه اثبات دقیقاً مانند قضیه ی ۳.۱ است.

قضیه ۴.۳:

فرض کنید $G$ یک گروه نامتناهی $FA$ـنمایش پذیر باشد، در این صورت هر زیر گروه متناهیاً تولید شده از $G$ چون $\mathcal{H}$ موضعاً آبلی متناهی است. و به علاوه مرتبه غیر تابی قسمت آبلی $\mathcal{H}$ حداکثر برابر $(\log(|\Sigma|))(k + ۱)$ است که در آن $\Sigma$ الفبایی است که اعضای $G$ را با ان نمایش داده‌ایم و $k$ تعداد حالتهای اتوماتونی است که عمل گروه $G$ را تصمیم می گیرد.

اثبات:

برای این منظور به مفاهیمی در مورد گروههای پوچ توان احتیاج داریم.

گروه $G$ پوچ توان مرتبه ۱ است اگر و فقط اگر $G$ آبلی باشد. ( یعنی $Z(G) = G$ ) $G$ پوچ توان از مرتبه $n + ۱$ است اگر و فقط اگر $\frac{G}{Z(G)}$ پوچ توان از مرتبه $n$ باشد. ما همچنین به نسخه ای از گروه هیسنبرگ[۱] که با نمایش داده می شود، احتیاج داریم چراکه با گروه پوچ توان آزاد از مرتبه ۲ ایزومورف است.

$$\mathrm{UT}_3(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حال به اثبات قضیه می‌پردازیم:

هر زیر گروه $\mathcal{H} \preceq G$ که با $\{g_۱, ..., g_r\}$ تولید شده باشد یک گسترش چندجمله‌ای به صورت

[۱] Heisenberg

$\{t(g_1,...,g_r)|t \in F(x_1,...,x_n), |t| \leq n\}$ ( یعنی تمام اعضای گروه آزاد بوجودآمده از $x_1$ تا $x_n$ که اندازه‌ی آنها کوچکتر مساوی $n$ است) دارد که دارای اندازه‌ای برابر با چندجمله‌ای از مرتبه $n$ است. بنابراین طبق قضیه گرموف [2] [۵] ، $\mathcal{H}$ موضعاً پوچ توان متناهی است. اگر $G = \mathcal{H}$ یعنی وقتی که $G$ خودش متناهی التولید باشد می توان بحث را چنین دنبال نمود : اگر $G$ موضعاً متناهی آبلی نباشد در این صورت با استفاده از قضیه‌ای که در مرجع [۲۳] بدان اشاره شده، $G$ دارای نظریه‌ای تصمیم ناپذیر است. ولی نظریه‌ی یک ساخت $FA$ـنمایش پذیر طبق خاصیت تفحص ارزیابی تصمیم پذیر است بنابراین $G$ موضعاً آبلی متناهی است.

با استفاده از نتایجی که در مورد گروههای پوچ توان در مرجع [۲۳] اثبات شده است، یک گروه موضعاً پوچ توان متناهی، یا در $UT_3$ گنجانده می شود و یا موضعاً آبلی متناهی است. اصل جزئیاتی که در این پایان‌نامه به این اثبات اضافه می شود آن است که نشان دهیم هر گروه $G$ای که در $UT_3$ گنجانده شود $FA$ـنمایش پذیر نیست، چرا که در این صورت یک $FA$ـنمایش ضعیف از $(\mathbb{N},.)$ بدست خواهد آمد که مغایر با قضیه‌ی ۲.۶ است. چراکه $UT_3(\mathbb{Z})$ نمایشی به صورت $< a,b,q : aba^{-1}b^{-1} = q, aqa^{-1}q^{-1} = bqb^{-1}q^{-1} = 1 >$ دارد که در آن $a,b,q$ ماتریسهای زیر هستند:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

پس $a^m b^n a^{-m} b^{-n} = q^{mn}$ برای هر $m,n \in \mathbb{Z}$ درست است. ملکوف در مرجع [۱۶] از این واقعیت بهره برد تا بتواند $(\mathbb{Z},.)$ در $UT_3(\mathbb{Z})$ تعبیر کند. در این تعبیر، $q^m$ یک عدد صحیح $m$ را نشان می دهد. برای تعریف ضرب به صورت درجه اول $\sigma : \exists u,v \in C(q) \ \ x = ubu^{-1}b^{-1} \ \ \wedge \ \ y = ava^{-1}v^{-1} \ \ \wedge \ \ z = uvu^{-1}v^{-1}$ که در آن $C(q)$ مرکز ساز عنصر $q$ در گروه $UT_3(\mathbb{Z})$ است. اگر $x = q^m, y = q^n$ باشند که $m,n$ دو عدد صحیح هستند آنگاه جمله $\sigma$ در $UT_3(\mathbb{Z})$ درست است. و شاهد این مدعا $x = a^m, v = b^n$ است. حال بر خلاف، فرض کنید $UT_3(\mathbb{Z})$ قابل گنجاندن در گروه $FA$ـنمایش پذیر $G$ باشد، در این صورت باتوجه به توضیحات بالا گروه $(\mathbb{Z},.)$ را می توان در $G$ ضعیفاً نمایش داد که این متناقض با $FA$ـنمایش ناپذیر بودن $(\mathbb{Z},.)$ است.

---

[2] Gromov

### ۲.۱.۳ قضایای $FA$ـنمایش پذیری در باب حلقه‌ها و میدانها

قضیه ۵.۳:

فرض کنید $\mathfrak{A}$ ساختی $FA$—نمایش‌پذیر باشد ونیز فرض کنید $\beta$ زیر ساختی از $\mathfrak{A}$ باشد. در این صورت $\beta$ دارای یک $FA$—نمایش ضعیف است.

توجه کنید که زیر ساخت $\beta$ لزوما در $\mathfrak{A}$ تعبیر پذیر نیست و در ضمن این قضیه بدان معنا نیست که $\beta$، $FA$—نمایش‌پذیر نیست و فقط وجود یک $FA$—نمایش ضعیف را برای ساخت $\beta$ تضمین می کند.

برهان: طبق تعریف $FA$—نمایش‌پذیری ضعیف کافیست ثابت کنیم که هر رابطه اتمی و نیز رابطه تساوی در ساخت $\beta$ تصمیم‌پذیر کارآمد است. (اگر به علاوه نشان می‌دادیم که اعضای $\beta$ در زبانی منظم قابل نمایش هستند، می‌توانستیم حکم کنیم که $\beta$، $FA$—نمایش‌پذیر است. ولی با مفروضات مساله این امر میسر نیست.)

هر رابطه اتمی در $\beta$ یک رابطه اتمی در $\mathfrak{A}$ نیز هست و به علاوه چون $\beta$ زیر ساختی از $\mathfrak{A}$ است. یعنی $|\beta| \subseteq |\mathfrak{A}|$. پس هر $k$تایی مرتب از اعضای $\beta$ میتواند به عنوان یک $k$تایی مرتب از اعضای $\mathfrak{A}$ در نظر گرفته شود. اما طبق فرض $\mathfrak{A}$ ساختی $FA$—نمایش‌پذیر است. یعنی به ازای هر رابطه $k$موضعی $\mathfrak{R}_k$ و هر $k$تایی مرتب از اعضای $\mathfrak{A}$ مثل $(a_1, ..., a_k)$، $\mathfrak{R}_k(a_1, ..., a_k)$ تصمیم پذیر کارامد است. پس چون هر رابطه اتمی $\beta$، می‌تواند به عنوان یک رابطه اتمی $\mathfrak{A}$ تلقی شود و هر چند تایی مرتب از اعضای $\beta$ می‌تواند به عنوان چند تایی مرتب از اعضای $\mathfrak{A}$ در نظر گرفته شود و نیز این که هر رابطه اتمی در $\mathfrak{A}$ به ازای هر چند تایی مرتب از اعضای آن تصمیم پذیر است، لذا هر رابطه اتمی $k$موضعی $\mathfrak{R}_k$ در ساخت $\beta$ به ازای هر $k$تایی مرتب از اعضای آن، تصمیم پذیر کارامد است.

به علاوه رابطه تساوی بین اعضای ساخت $\beta$ همان رابطه تساوی بین اعضای ساخت $\mathfrak{A}$ است که به مجموعه (نوعاً تعریف ناپذیر) $|\beta|$ تحدید شده است. لذا $\beta$ ضعیفا $FA$—نمایش‌پذیر است.

قضیه ۶.۳:

هر حلقه‌ی یکدار $FA$—نمایش‌پذیر، مشخصه ای غیر صفر دارد.

برهان:

برعکس، فرض کنید حلقه‌ی یکدارِ $FA$−نمایش‌پذیرِ $(R, ._R, +_R, ۱_R, ۰_R)$، دارای مشخصه ی صفر باشد. نشان می‌دهیم که ساخت $(\mathbb{Z}, \times)$ یکریخت با زیر ساختی از $R$ است. تابع $\mathfrak{f} : \mathbb{Z} \to R$ را با ضابطه $\mathfrak{f}(z) = z۱_R$ که در آن $۱_R$عنصر همانی ضرب حلقه $R$ است و نیز منظور از $z۱_R$ عبارتست از:

$$z > ۰ \qquad z۱_R = \underbrace{۱_R + ۱_R + ....}_{z-times}$$
$$z < ۰ \qquad z۱_R = \underbrace{(-۱_R) + (۱_R) + ....}_{z-times}$$
$$z = ۰ \qquad z۱_R = ۰_R$$

در نظر بگیرید. ثابت می کنیم$\mathfrak{f}$ یک تک‌ریختی از $\mathbb{Z}$ به $\mathfrak{R}$ است. باید نشان دهیم برای هر دو عنصر $z_۱, z_۲ \in \mathbb{Z}$ داریم:

۱ − $\mathfrak{f}(z_۱ + z_۲) = \mathfrak{f}(z_۱) + \mathfrak{f}(z_۲)$

۲ − $\mathfrak{f}(z_۱ \times z_۲) = \mathfrak{f}(z_۱)._R\mathfrak{f}(z_۲)$

۳ − $\mathfrak{f}(z_۱) = \mathfrak{f}(z_۲) \to z_۱ = z_۲$

اثبات ۱:

$$\mathfrak{f}(z_۱ + z_۲) = (z_۱ + z_۲)۱_R = \underbrace{(۱_R) + (۱_R) + ....}_{z_۱+z_۲-times}$$
$$= \mathfrak{f}(z_۱) + \mathfrak{f}(z_۲) = \underbrace{۱_R + ۱_R + ....}_{z_۱} + \underbrace{۱_R + ۱_R + ....}_{z_۲} = z_۱۱_R + z_۲۱_R$$

اثبات ۲:

$$\mathfrak{f}(z_۱ \times z_۲) = (z_۱ \times z_۲)۱_R = \underbrace{۱_R + ۱_R + ....}_{z_۱ \times z_۲}$$
$$= \underbrace{z_۱۱_R + z_۱۱_R + ....}_{z_۲ times} = z_۱۱_R(\underbrace{۱_R + ۱_R + ....}_{z_۲ times})$$
$$= z_۱۱_R._R z_۲۱_R = \mathfrak{f}(z_۱)._R\mathfrak{f}(z_۲)$$

اثبات ۳:

$$\mathfrak{f}(z_۱) = \mathfrak{f}(z_۲) \;\Rightarrow\; \mathfrak{f}(z_۱ - z_۲) = ۰ \;\Rightarrow\; (z_۱ + z_۲)۱_R = ۰_R$$

اما طبق فرض $R$ یک حلقه‌ی یکدار با مشخصه‌ی صفر است. یعنی

$$(z_۱ - z_۲)۱_R = ۰_R \Rightarrow z_۱ - z_۲ = ۰ \Rightarrow z_۱ = z_۲$$

یعنی تابع f یک به یک است. بنابراین f یک تک‌ریختی از $\mathbb{Z}$ به $R$ است.

پس نشان دادیم که $(\mathbb{Z}, \times, +, ۰, ۱)$ در حد ایزومورفیسم یک زیرساخت از هر حلقه‌ی یکدار، بامشخصه‌ی صفر، مثل $(R, ._R, +_R, ۱_R, ۰_R)$ است. پس اگر حلقه‌ی یکدار بامشخصه ی صفرِ $R$(طبق فرض ) $FA$−نمایش‌پذیر باشد، $(\mathbb{Z}, \times)$ بعنوان یک زیر ساخت آن $FA$−نمایش‌پذیر ضعیف خواهد بود. واین با قضیه ۶.۲ مبنی بر $FA$−نمایش‌پذیر نبودن $(\mathbb{Z}, \times, +, ۰, ۱)$ (چه قوی چه ضعیف) در تناقض است، پس فرض خلف غلط است، یعنی هر حلقه ی یکدارِ $F$نمایش‌پذیر، مشخصه ای ناصفر دارد.

قضیه ۷.۳:

هیچ میدان نامتناهی بامشخصه‌ی صفر نمیتواند $FA$−نمایش‌پذیر باشد.

برهان:

میدان $F$ را میتوان به عنوان یک حلقه ی یکدار تلقی نمود. از آنجا که هیچ حلقه ی یکداری بامشخصه ی صفر نمیتواند $FA$−نمایش‌پذیر باشد. پس هیچ میدان نامتناهی بامشخصه‌ی صفر مثل $F$ نمیتواند $FA$−نمایش‌پذیر باشد.

## ۲.۳ اتوماتون بوخی ( Büchi )

یک اتوماتون بوخی، یک اتوماتون متناهی ( غیر قطعی ) است که به عنوان ورودی رشته‌ای نامتناهی روی الفبای $\Sigma$ ی خود را می‌پذیرد. زبان این اتوماتون مجموعه‌ی

{ همه‌ی $w \in \Sigma^\omega$ که برای آنها اتوماتون (محتملاً در بی‌نهایت) با خواندن $w$ حداقل از یکی از حالات پذیرش نهایی عبور کند}

است. برای جزئیات بیشتر در مورد این اتوماتون به مرجع [۳۴] مراجعه نمایید.

بوخی ثابت کرد که زبان $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^{\omega}$ توسط ماشین بوخی پذیرش می‌شود اگر و فقط اگر $\mathcal{L}$ اجتماع متناهی از زبان‌ها به شکل $UV^{\omega}$ باشد که در آن $U, V \subseteq \Sigma^{*}$ هستند و نیز منظم‌اند. ( یعنی توسط یک اتوماتون متناهی پذیرش می‌شوند ) اگر زبان $V \subseteq \Sigma^{*}$ غیر تهی و منظم باشد آنگاه $|V^{\omega}| < ۲^{\aleph_۰}$ ایجاب می‌کند که $V^{\omega} = \{\gamma\}^{*}$ باشد که در آن $\gamma$ رشته‌ای متناهی است. ( برای درک این مطلب ) توجه کنید که رابطه‌ی هم ارزی روی رشته‌های متناهی که بوسیله‌ی $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \exists i, j \quad \alpha^{i} = \beta^{j}$ تعریف می‌شود دارای کلاس‌های هم ارزی به شکل $\{\gamma\}^{*}$ است. اگر $|V^{\omega}| < ۲^{\aleph_۰}$ باشد در این صورت هر دو رشته در $V$ با هم هم‌ارزند و بنابراین $V^{\omega} = \{\gamma^{\omega}\}$ که در آن $\{\gamma\}^{*}$ کلاس هم‌ارزی شامل $V$ است.

قضیه‌ی بوخی حکم می‌کند که یک زیرمجموعه از $\Sigma^{\omega}$، بوخی − تشخیص پذیر است اگر و فقط اگر این زبان قابل تعریف در $S_۱S_{\Sigma}$ باشد یعنی تکین درجه‌ی دوّم زبان یک تابع تالی روی $\Sigma$ باشد ( به مرجع [۳۴] مراجعه شود). خصوصاً این که، مجموعه‌های بوخی − تشخیص پذیر تحت متمم گیری بسته هستند.

### ۱.۲.۳ ساخت‌های بوخی − نمایش پذیر

با تغییرات طبیعی در تعریف $FA$− نمایش پذیری، ما به مفهوم بوخی نمایش پذیری برای ساخت‌ها دست خواهیم یافت ( این ساخت‌ها $\omega$− اتوماتیک نیز نامیده می‌شوند ) از میان ساخت‌های متعدد که $\omega$− اتوماتیک هستند می‌توان به جبر بول $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \varphi, \mathbb{N}, \cup, \cap, ')$ اشاره کرد. در این مثال الفبای ما $\{۰, ۱\}$ است و زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ را به صورت رشته‌های نامتناهی از صفر و یک درنظر می‌گیریم ( اگر رشته‌ای با صفر شروع شود یعنی <u>۱</u> عضو آن زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ که این رشته نمایش آن است نیست و اگر این رشته با ۱ شروع شود یعنی <u>۱</u> عضو آن زیرمجموعه هست و قس‌الهذا ). مثال‌های طبیعی دیگر شامل $(R, +)$، $(Z_{p,+})$ و $(Q_p, +)$ می شود. $(R, +)$ و $(Q_p, +)$ بسیار حائز اهمیت‌اند چرا که هر دو گروه‌هایی آبلی روی یک فضای $Q$− برداری با بعد $۲^{\aleph_۰}$ هستند، در حالی که هنوز معلوم نیست $(Q, +)$، $FA$ نمایش پذیر است یا خیر. با استفادهاز روشهای اثبات قضیه بوخی می‌توان نشان داد که خواص مهم ساخت‌های $FA$− نمایش‌پذیر از قبیل خاصیت تفحص ارزیابی و نیز تصمیم پذیری نظریه آنها، همچنان برای ساخت‌های بوخی − نمایش پذیر نیز صادق هستند.

## ۳.۳ پیچیدگی کلاس ساخت‌های $FA$– نمایش پذیر

ساخت $\mathfrak{A}$ را در نظر بگیرید

رابطهٔ $k$– موضعی $R$ را در $\mathfrak{A}$ تصمیم پذیر گوییم اگر به ازای هر $(a_1, \ldots, a_k) \in |\mathfrak{A}|^k$ بتوانیم تصمیم بگیریم $(a_1, \ldots, a_k) \in R$ هست یا خیر. فرض کنید رابطه‌ی $R$ توسط فرمولی چون $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ که در آن فقط $x_1$ تا $x_k$ متغیر آزادند، در $\mathfrak{A}$ تعریف شده باشد نیز فرض کنید ساخت $\mathfrak{A}$ اصل پذیر متناهی است، یعنی مجموعه‌ای متناهی چون $\Gamma_0$ از جملات درجه اوّل در زبان ساخت $\mathfrak{A}$ چنان موجود باشد که برای هر جمله‌ی $\sigma$ داشته باشیم

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma \Longleftrightarrow \Gamma_0 \vdash \varphi(a_1, \ldots, a_k)$$

در این صورت تصمیم‌پذیری رابطه‌ی $R$ در ساخت $\mathfrak{A}$ معادل این است که برای $k$ تایی مرتب مثل $(a_1, \ldots, a_k) \in |\mathfrak{A}|^k$ مشخص کنیم $\varphi(a_1, \ldots, a_k)$ از $\Gamma_0$ نتیجه می‌شود یا خیر. به صورت دقیق‌تر یعنی:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi(a_1, \ldots, a_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_0 \vdash \varphi(a_1, \ldots, a_k).$$

فرض کنید مجموعه‌ای چون $\Gamma_0$ از جملات درجه‌ی اول داده شده است. $Cn\Gamma_0$ عبارتست از مجموعه‌ی همهٔ جملات درجه اولی که به صورت منطقی از $\Gamma_0$ استنتاج می‌شوند: $Cn\Gamma_0 = \{\sigma | \ \Gamma_0 \models \sigma\}$.

رابطه‌ی $R$ را که برای هر $k$ تایی منظم از $|\mathfrak{A}|^k$ مثل $(a_1, \ldots, a_x)$ در ساخت اصل‌پذیر متناهی چون $\mathfrak{A}$ تصمیم پذیر است، رابطه‌ای بازگشتی روی $\mathfrak{A}$ می‌گوییم و آنها را با $\Delta_1^0$ نشان می‌دهیم.

رابطه $\tau$ روی $\mathfrak{A}$، $\Sigma_1^0$ است اگر و فقط اگر رابطه‌ی بازگشتی چون $R$ در $\mathfrak{A}$ چنان موجود باشد که داشته باشیم

$$\overrightarrow{a} \in \tau \quad \Longleftrightarrow \quad \exists b \quad (\overrightarrow{a}, b) \in R$$

رابطه‌ی $S$ روی $\mathfrak{A}$، $\Pi_1^0$ است اگر و فقط اگر رابطه‌ی بازگشتی چون $R$ در $\mathfrak{A}$ چنان موجود باشد که داشته باشیم

$$\overrightarrow{a} \in \mathcal{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall b \ (\overrightarrow{a}, b) \in R$$

حال اگر زبان را به منطق محمولات درجه دوّم گسترش دهیم یعنی بتوانیم روی توابع و روابط (در واقع روی زیرمجموعه‌های ساخت $\mathfrak{A}$) نیز سور بگذاریم. تعاریف بالا بصورت زیر در خواهند آمد:

ساخت $\mathfrak{A}_1$ اصل‌پذیر متناهی درجه‌ی دوّم است اگر مجموعه‌ی متناهی از جملات درجه‌ی دوّم چون $\Lambda_0$ چنان موجود باشد که به ازای هر جمله‌ی درجه دوّم چون $\sigma$ داشته باشیم: $\quad \Lambda_0 \vdash \sigma \iff \models_{\mathfrak{A}_1} \sigma$

مجموعه‌ای از روابط $k$ موضعی چون $\mathfrak{R}$ را که به ازای هر رابطه از $|\mathfrak{A}|^k$ در ساخت اصل پذیر متناهی درجه‌ی دوّم چون $\mathfrak{A}_1$ تصمیم پذیر است، بازگشتی درجه دوّم یا $\Delta_1^1$ می‌نامیم.

مجموعه‌ای از روابط مثل $T$ روی $\mathfrak{A}_1$، $\Sigma_1^1$ است اگر و فقط اگر مجموعه‌ای چون $\mathfrak{R}$ که $\Delta_1^1$ است چنان موجود باشد که برای هر رابطه $R$ داشته باشیم

$$.R \in T \iff \exists f \quad (R, f) \in \mathfrak{R}$$

مجموعه‌ای از روابط مثل $S$ روی $\mathfrak{A}_1$، $\Pi_1^1$ است اگر و فقط اگر مجموعه‌ای چون $\mathfrak{R}$ که $\Delta_1^1$ است چنان موجود باشد که به ازای هر رابطه $R$ داشته باشیم

$$.R \in \mathcal{S} \iff \forall f \quad (f, R) \in \mathfrak{R}$$

حال داریم:

مسئله‌ی یک‌ریختی برای دو ساخت $FA-$ نمایش پذیر $\Sigma_1^1$ است.

ساخت $\alpha$ و $\beta$ را در یک زبان درنظر بگیرید. $\alpha$ با $\beta$ یک‌ریخت است اگر و فقط گر تابعی چون $f$ از $|\alpha|$ به $|\beta|$ ($f : |\alpha| \longrightarrow |\beta|$) چنان موجود باشد که شرایط زیر حفظ شوند:

۱$-$ $f$ یک به یک و پوشا باشد $Rg(f) = |\beta| \quad \wedge \quad f(x) = f(y) \iff x = y$

$$.Rgf = \{b \in |\beta| \mid \exists x \quad f(x) = b\}$$

۲$-$ برای هر نماد رابطه‌ای $k$ موضعی $R$ در زبان ساخت $\alpha$ و $\beta$ و هر $k$ تایی منظم از اعضای $|\alpha|$ داشته باشیم

$$.(a_1, \ldots, a_k) \in R^\alpha \iff (f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in R^\beta$$

۳$-$ برای هر نماد ثابت در زبان این دو ساخت مثل $c$ داشته باشیم

$$.f(c^\alpha) = c^\beta$$

پس اگر ساخت جدید $\alpha\beta$ را که اعضای آن در واقع توابع ( روابطی ) از $\alpha$ به $\beta$ هستند درنظر بگیریم یعنی $|\alpha\beta| = |\alpha| \times |\beta|$. ساخت $\alpha$ و $\beta$ با هم یک‌ریختند اگر و فقط اگر تابعی چون $f$ با خواص فوق در ساخت $\alpha\beta$ موجود باشد. اگر وصل جملات ۱ تا ۳ را$\Psi$ بنامیم، مسئله ی تصمیم گیری در مورد یک‌ریختی دو ساخت $\alpha$ و $\beta$ در واقع تصمیم در مورد درستی جمله ی

$$\exists f \ \in \ \alpha\beta \quad \Psi$$

است. چون جملات ۱ تا ۳ تصمیم پذیر هستند پس $\Psi$،$\Delta_1^1$ است و در نتیجه‌ا ین مسئله طبق تعریف $\Sigma_1^1$ است.

**قضیه ۱.۳.۳** مسئله‌ی یک‌ریختی دو گراف $FA-$ نمایش پذیر $\Sigma_1^1-$ کامل است.

مشخص است که این مسئله $\Sigma_1^1$ است و فقط کافی است ثابت کنیم هر مسئله $\Sigma_1^1$ دیگر به این مسئله قابل تبدیل است. چون این مسئله در مورد گراف‌های $FA-$ نمایش پذیر است و در واقع گرافی $FA-$ نمایش پذیر است که گراف یک اتوماتون باشد پس می‌توان با الگوریتم‌های شناخته شده‌ای این دو گراف را به گراف‌هایی هم‌بند و بدون دور تبدیل نمود.

اثبات کامل این قضیه در مرجع [۱۴] آمده است. در آنجا الگوریتمی برای تبدیل مسئله پیشوند بودن دو دنباله از اعداد طبیعی که‌نوعاً مساله ای $\Sigma_1^1-$ کامل است، به‌مساله یک‌ریختی دو گراف $F-$نمایش پذیر،ارائه شده‌است.

# فصل چهارم

# ساختارهای جبری شبه متناهیاً اصل پذیر

## ۱.۴ گروه‌های شبه اصل پذیر

در این فصل ما قصد داریم روش دیگری را برای توصیف گروه‌ها بکار بریم. برای ایجاد یک پس زمینه‌ی ذهنی، در این بخش ما در مورد این بحث می‌کنیم که به چه اندازه یک گروه متناهی المولد با نظریه‌ی مرتبه‌ی اوّلش مشخص می‌شود. $Th(G)$ یعنی تمام جملات درجه‌ی اوّلی که در گروه $G$ درستند، شامل اطلاعاتی نظیر اینکه آیا $G$ پوچ توان است یا بدون تاب است یا ... می‌باشد. ولی بسیاری از خصوصیات یک گروه در منطق درجه‌ی اوّل قابل فرمول بندی نیستند. برای مثال، متناهی‌المولد بودن، داشتن شرط ماکسیمم بودن ( یعنی هر زیرگروه یک گروه مثل $G$، متناهی‌المولد باشد ) و ساده بودن، خصوصیاتی درجه اوّل از گروه $G$ نیستند. یک خصوصیت درجه‌ی اوّل از گروهی مثل $G$ با این حقیقت قابل تشخیص است که آیا آن خصوصیت ذاتی است یا خیر. به عبارت دیگر نمی‌توان از $G$ بیرون رفت ( از اعضایش و روابط مربوط به آن ). از آنجا که خصوصیاتی نظیر ساده بودن یا متناهی‌المولد بودن به زیرمجموعه‌های $G$ بستگی دارد، نمی‌توان در داخل $G$ آنها را تحقیق نمود.

اگر $G$، متناهی‌المولد و نامتناهی باشد تا چه اندازه $G$ با $Th(G)$ مشخص می‌شود؟

به طور دقیق‌تر فرض کنید گروهی دیگر مانند $\mathcal{H}$ موجود باشد به طوری که متناهی‌المولد و نامتناهی باشد، اگر داشته باشیم $Th(G) = Th(\mathcal{H})$. چه شرط بیشتری لازم است تا حکم کنیم $G \simeq \mathcal{H}$.

**تعریف ۱.۱.۴** گروه نامتناهی، متناهی‌المولد $G$ شبه اصل پذیر است اگر و فقط اگر $ThG$، $G$ را بصورت منحصر به فرد اصل بندی نماید، یعنی اگر گروه نامتناهی و متناهی‌المولد دیگر چون $\mathcal{H}$ موجود باشد که $ThG = Th\mathcal{H}$، در این صورت حکم کنیم $G \simeq \mathcal{H}$.

توجه کنید که لغت «شبه» برای تأکید به شرایط اضافی است که روی اصل پذیری درجه‌ی اوّل یک گروه می‌گذاریم. همانطور که قبلاً اشاره کردیم، خواص نامتناهی بودن یا متناهی‌المولد بودن گروهی مثل $G$، خواص قابل بیان در منطق درجه‌ی اوّل نیستند. بنابراین این دو شرط را ما به عنوان پیش فرض تلقی می‌کنیم ولی بقیه اصولی که گروه $G$ را با آنها توصیف می‌کنیم باید درجه‌ی اول باشند.

**مثال ۲.۱.۴** هرگروه آبلی متناهی‌المولد بدون تاب، اصل پذیر متناهی است.

طبق قضیه رده‌بندی گروه‌های آبلی متناهی‌المولد هر گروه آبلی بدون تاب متناهی‌المولد به ازای $n$ ای با $\mathbb{Z}^n$ ایزومورف است. اما همانطور که در قضیه ی ۱.۲.۱ در فصل مقدمات نشان داده شد که $\mathbb{Z}$ اصل پذیر است، تنها چیزی که $\mathbb{Z}^n$ را از $\mathbb{Z}$ متمایز می‌کند آن است که $\left|\frac{\mathbb{Z}^n}{۲\mathbb{Z}^n}\right| = ۲^n$ این خاصیت با جملات درجه‌ی اوّل زیر تعریف پذیر است

$$\{۲G\} : \qquad \exists y \quad x = y + y$$

$$\{\frac{G}{۲G}\} : \qquad x \in ۲G \Longrightarrow x = ۰$$

$$\left|\frac{G}{۲G}\right| = ۲^n \qquad \exists a_۱ \quad \exists a_۲ \ldots \exists a_{۲^n}:$$

$$\left(\begin{array}{lll} (a_1 \neq a_2 \ \wedge\ a_1 = a_3 \ \wedge\ a_1 = a_4 \dots & & \\ \wedge & (\ a_2 \neq a_3 \ \wedge\ a_2 = a_4 & \\ \wedge & \quad a_3 \neq a_4 & \\ \vdots & & \\ \wedge & \quad a_{2n-1} \neq a_{2n} & \end{array}\right) \wedge \quad \forall y \quad \begin{array}{l} y = a_1 \ \vee \\ y = a_2 \ \vee \\ \vdots \\ y = a_{2n}) \end{array}$$

مرکز گروهی مثل $G$ عبارت است از مجموعه‌ی اعضایی از آن که با هر عضو از $G$ جابجا شوند یعنی

$$Z(G) = \{x \in G|\ \forall y \quad xy = xy\}$$

مشخص است که $Z(G)$ در $G$ نرمال است، پس $\frac{G}{Z(G)}$ یک گروه است حال مرکز این گروه را درنظر بگیرید (یعنی $Z(\frac{G}{Z(G)})$). چون $Z(G)$ در $G$ نرمال است پس هومومورفیسم طبیعی چون $\gamma : G \longrightarrow \frac{G}{Z(G)}$ با ضابطه‌ی $\gamma(a) = aZ(G)$ وجود دارد. نگاشت معکوس $\gamma$ یعنی $\gamma^{-1}$ نگاشتی است که عضو همانی گروه $\frac{G}{Z(G)}$ را به مجموعه‌ی $Z(G)$ می‌برد، پس $\gamma^{-1}(Z(\frac{G}{Z(G)}))$ یک زیر گروه از $G$ است که $Z(G)$ در آن نرمال است این زیرگروه را با $Z_2(G)$ نشان می‌دهیم ( یعنی $Z_2(G) = \gamma^{-1}(Z(\frac{G}{Z(G)}))$ ) با ادامه این کار به یک سری زیرنرمال از $G$ دست پیدا می‌کنیم که به آن سری مرکز فزاینده‌ی $G$ می‌گوییم و داریم

$$Z(G) = Z_1(G) \trianglelefteq Z_2(G) \trianglelefteq Z_3(G) \dots$$

گروه $G$ را پوچ توان از مرتبه‌ی $n$ می‌نامیم اگر و فقط اگر $\quad Z_n(G) = G$

مشخص است که هر گروه آبلی پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۱ است چرا که مرکز این گروه، کل گروه است ( $Z_1(G) = Z(G) = G$ )

**مثال ۳.۱.۴** هر گروه بدون تاب پوچ توان از مرتبه‌ی ۲، اصل پذیر است.

بدون تاب بودن این گروه مانند آنچه در مثال قبل از فصل مقدمات یاد شد توسط مجموعه‌ی نامتناهی از جملات درجه‌ی اوّل به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\forall x \qquad x \neq x^{۲}$$

$$\forall x \qquad x \neq x^{۳}$$

$$\vdots$$

به علاوه پوچ توان بودن آن از مرتبه‌ی ۲ را می‌توان با جملات درجه‌ی اول زیر اصل بندی کرد

$$Z(G): \qquad \forall y \quad xy = yx$$

$$\frac{G}{Z(G)}: \qquad \forall x \quad x \in Z(G) \Longrightarrow x = ۰$$ که در این جمله $x \in Z(G)$ در بالا تعریف شده است

$$Z(\frac{G}{Z(G)}): \qquad \forall y \in \frac{G}{Z(G)} \quad xy = yx$$ در این جمله نیز $x \in \frac{G}{Z(G)}$ در بالا تعریف شده است

$$Z_{۲}(G) = \gamma^{-۱}(Z(\frac{G}{Z(G)})): \qquad \forall y \in Z(\frac{G}{Z(G)}) \quad \forall x \in Z(G) \quad z = x \cdot y$$

$$G = Z_{۲}(G): \qquad \forall y \in G \quad \exists x \in Z_r(G) \quad x = y$$

در اینجا قضیه مهم زیر که حاصل کارهای هیرشون[۱] و اُجر[۲] که به ترتیب در مراجع [٦] و [۲۵] آمده‌اند، قابل ذکر است.

### قضیه ۴.۱.۴

$I$) هر گروه متناهی‌التولید و بدون تابِ پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲، شبه اصل پذیر است.

$II$) گروه‌های متناهی‌التولید و بدون تاب و پوچ‌توان از مرتبه ۳، مانند $H$ و $G$ چنان موجودند که دارای نظریه‌ی یکسان هستند ولی با هم ایزومورف نیستند، یعنی $ThH = ThG$ ولی $G \not\cong H$.

اُجر در [۲۵] نشان داد که برای هر گروه متناهی‌التولید پوچ‌توان مثل $G$ و $H$ داریم:

$$Th(G) = Th(H) \iff G \times \mathbb{Z} = H \times \mathbb{Z} \qquad (*)$$

---

۱ Hirshon

۲ Oger

قسمت ($\Longleftarrow$) این قضیه در واقع برای هر گروه $G$ و $H$ درست است. سپس هریشون این پرسش را مطرح کرد که برای چه گروه‌هایی مثل $A$ و $B$ می‌توان قسمت $\mathbb{Z}$ را در حاصلضرب مستقیم که در رابطه‌ی ( $*$ ) آمده است حذف نمود بطوری که داشته باشیم:

$$ThA = ThB \quad \Longrightarrow \quad A \simeq B$$

این مطلب برای هر گروه متناهی‌التولید بدون تاب و پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ درست است ولی همواره برای گروه‌های متناهی‌التولید بدون تاب و پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۳ درست نیست.

توجه کنید که در قضیه ۴.۱.۴ قسمت $I$، شرط بدون تاب بودن ضروری است چرا که زیلبر[۳] در مرجع [۳۵] نشان داد که گروه‌های متناهی‌التولید و پوچ‌توان از مرتبه ۲ وجود دارند بطوری که $ThH = ThG$ ولی $G \not\simeq H$.

با گسترش کارهای زیلبر، اُجر در مرجع [۲۴] نشان داد که دو گروه پوچ‌توان از مرتبه‌ی ۲ و موضعاً آبلی متناهی زیر دارای نظریه‌های یکسانی هستند ولی با هم ایزومورف نیستند

$H =< a,d|\ a^{۲۵} = ۱,\ d^{-۱}ad = a^{۱۱} >$ و $G =< a,b|\ a^{۲۵} = ۱,\ d^{-۱}ad = a^{٦} >$.

### تعریف ۵.۱.۴ گروه‌های شبه متناهیاً اصل پذیر[۴]

ساخت جبری $G$ را شبه متناهیاً اصل پذیر ($QFA$) گوییم اگر و فقط اگر شرایط زیر را داشته باشد

۱– این ساخت نامتناهی باشد. ۲– این ساخت متناهی‌التولید باشد.

۳– مجموعه‌ی متناهی از جملات درجه اوّل در زبان این ساخت موجود باشند که این ساخت را بطور منحصر بفرد ( در حد ایزومورفیسم ) توصیف کنند یعنی مجموعه‌ی متناهی از جملات درجه‌ی اوّل مثل $\Sigma$ چنان موجود باشد که اولاً $\Sigma \models_G$ و درثانی اگر ساخت جبری دیگر چون $\mathcal{H}$ موجود باشد که $\Sigma \models_{\mathcal{H}}$، آن‌گاه $\mathcal{H} \simeq G$.

---

[۳] Zilber

[۴] Qusi - Finitly Axiomatizable Groups

**مثال ۶.۱.۴** هیچ گروه آبلی، $QFA$ نیست.

طبق قضیه رده‌بندی گروه‌های آبلی متناهی‌التولید، هر گروه آبلی متناهی‌التولید آبلی به فرم $A \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_r} \times \mathbb{Z}^n$ است. قبلاً نشان دادیم که $\mathbb{Z}^n$ اصل پذیر است، ولی اصل پذیر متناهی نیست پس اگر $A$ شبه متناهیاً اصل پذیر باشد نمی‌تواند دارای مؤلفه‌ی بدون تاب باشد چرا که به ازای هر $\mathbb{Z}$ در حاصلضرب مستقیم خارجی بالا باید بگوییم $x_1$ ای در $A$ وجود دارد که بدون تاب است یعنی $x_1 \neq x_1 + x_1$ و $x_1 \neq x_1 + x_1 + x_1$ و ... که تعداد نامتناهی جمله‌ی درجه اوّل را پدید می آورد. پس $A$ نمی‌تواند شامل اعضای بدون تاب باشد از این رو $A$ باید به شکل $A \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_r}$ باشد ولی این گروه گروهی متناهی است و ناقض شرط <u>۱</u> تعریف $QFA$ بودن است. لذا هیچ گروه آبلی، $QFA$ نیست.

می‌دانیم که اگر برای دو کلاس از ساخت‌ها مثل $C$ و $D$ داشته باشیم $C \subset D$ آن‌گاه $ThD \subseteq ThC$ خواهد بود. پرسشی که این جا مطرح می‌شود این است که چه شرطی روی کلاس‌های $C$ و $D$ بگذاریم تا $ThD \subsetneqq ThC$ شود؟ یعنی نظریه ساخت $D$، زیرمجموعه‌ی سره‌ای از نظریه‌ی ساخت $C$ شود.

**قضیه ۷.۱.۴** (محک $QFA$) اگر ساخت جبری $QFA$ ی $G$ عضوی از $D - C$ باشد آن‌گاه $ThD \subset ThC$ خواهد بود.

چون طبق فرض $G$ ساختی $QFA$ است، پس مجموعه‌ای متناهی چون $\Sigma_\circ$ آنرا اصل بندی می‌کند. جمله‌ی $\varphi$ را وصل تمام جملات $\Sigma_\circ$ ( که تعداد آنها متناهی است ) در نظر می‌گیریم، طبق فرض $G \in D - C$ یعنی $G \notin C$. بعلاوه برای هر ساخت مثل $\mathfrak{A} \in C$ می‌دانیم که $Th\mathfrak{A}$ نظریه‌ای تام است یعنی به ازای هر جمله‌ی درجه‌ی اوّل مانند $\sigma$ یا $\models_{\mathfrak{A}} \sigma$ و یا $\models_{\mathfrak{A}} \sim \sigma$. امّا برای هر ساخت $\mathfrak{A} \in C$ داریم $\models_{\mathfrak{A}} \sim \varphi$ چرا که اگر در ساختی مثل $\mathfrak{A}$ جمله‌ی درجه‌ی اوّل $\varphi$ درست باشد یعنی اگر ( فرض خلف ) برای ساختی چون $\mathfrak{A}$ داشته باشیم $\models_{\mathfrak{A}} \varphi$ در این صورت طبق تعریف ساخت‌های $QFA$ــ خاصیت سوم ــ $G \simeq \mathfrak{A}$. ولی این خلاف فرض متعلق نبودن $G$ــ به کلاس $C$ است. پس فرض خلف باطل است و برای هر ساخت $\mathfrak{A} \in C$ خواهیم داشت $\models_{\mathfrak{A}} \sim \varphi$. چون $ThC$ مجموعه‌ی همه‌ی جملات درجه‌ی اوّلی است که در هر ساخت $C$ صادق هستند پس $\sim \varphi \in ThC$. واضح است که $\sim \varphi \notin ThD$ چرا که اگر $\sim \varphi \in ThD$ باشد ( فرض خلف ) باید درتمام ساخت‌های این کلاس درست

باشد. الالخصوص طبق فرض $G \in D$ و داریم $\models_G \varphi$ پس $\sim\varphi \notin ThD$. لذا مجموعه‌ی $ThC - ThD$ غیر تهی است و این بدان معناست که $ThD \subset ThC$.

### ۱.۱.۴ گروه‌های پوچ‌توان

اُجر و صبّاق[۵] [۲۷] خاصیت $QFA$ بودن را برای گروه‌های پوچ‌توان باروش‌های کاملاً جبری مشخص کردند. بطور غیر رسمی، گروه پوچ‌توانِ متناهی‌التولید $G$، $QFA$ است اگر و فقط اگر مرکز این گروه یعنی $Z(G)$ آنقدر بزرگ نباشد که نتوان آنرا تمیّز داد.

برای گروه $G$، زیرگروه تولید شده توسط برگردان‌های گروه $G$ را با $G'$ نمایش می‌دهیم یعنی $G' =< \{x^{-1}y^{-1}xy|\ x,y \in G\} >$. در این صورت $\Delta(G)$ که با $\Delta(G) = \{x|\ \exists m > 0\ s.t\ x^m \in G'\}$ تعریف می‌شود، کوچکترین زیرگروه نرمالی از $G$ است شامل تمامی عناصر تابدار $G$ به انضمام همه‌ی برگردان‌های گروه $G$ است یعنی $\frac{G}{\Delta(G)}$ یک گروه آبلی بدون تاب خواهد بود.

**قضیه ۸.۱.۴** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی‌التولیدِ نامتناهیِ پوچ‌توان است. در این صورت، $G$، $QFA$ است اگر و فقط اگر $Z(G) \subset \Delta(G)$ باشد.

اثبات این قضیه در مرجع [۲۷] آمده است. در آنجا همچنین نشان داده شده که چون در هر گروه آبلی $Z(G) = G$ در صورتی که $\Delta(G)$ عبارتست از عناصر تابدار آن گروه آبلی که زیرگروهی متناهی است یعنی $Z(G) \not\subseteq \Delta(G)$، پس این گروه‌ها نمی‌توانند $QFA$ باشند.

**قضیه ۹.۱.۴** برای هر گروه متناهی‌التولیدِ پوچ‌توان، احکام زیر معادلند:

$I)$ $Z(G) \not\subseteq \Delta(G)$

$II)$ $G$ دارای زیرگروهی با اندیس متناهی در آن است که دارای مؤلفه‌ی ضرب مستقیم ایزومورف با $\mathbb{Z}$ است.

---

[۵] Sabbagh

$I \Longrightarrow II$) چون $Z(G) \nsubseteq \Delta(G)$ پس $x$ای در $G$ وجود دارد که $x \in Z(G) - \Delta(G)$ باشد.
طبق آنچه گفته شد $\frac{G}{\Delta(G)}$ یک گروه آبلی بدون تاب است. علاوه بر این چون $G$ متناهی‌المولد است پس $\frac{G}{\Delta(G)}$ نیز چنین خواهد بود و طبق قضیه‌ی رده‌بندی گروه‌های آبلی متناهی‌المولد داریم: $\frac{G}{\Delta(G)} \simeq \mathbb{Z}^m$. چون $x \notin \Delta(G)$ پس $x\Delta(G) \neq E$ که در آن $E$ عضو خنثی عمل گروه $\frac{G}{\Delta(G)}$ است. پس مشخصاً زیرگروه تولید شده با این اعضا زیرگروهی از $\mathbb{Z}^m$ است. یعنی $< x\Delta(G) > \leq \mathbb{Z}^m$.
بعلاوه چون مولّد این زیرگروه تنها یک عضو است پس $\mathbb{Z} \simeq \Delta(G) . < x > = < x\Delta(G) >$، پس خواهیم داشت

$$. < x > = \mathbb{Z} \times \Delta(G) \leq G$$

پس $G$ دارای زیرگروهی چون $< x >$ است که دارای مؤلفه‌ی ضرب مستقیمی، ایزومورف با $\mathbb{Z}$ است.

اثبات $II \Longrightarrow I$) فرض کنیم $G$ دارای زیرگروهی با مؤلفه‌ی ضرب مستقیم ایزومورف با $\mathbb{Z}$ باشد یعنی $\mathcal{H} \simeq K \times \mathbb{Z} \leq G$. طبق فرض مجموعه‌ی مولدهای $G$ متناهی است. لذا مجموعه‌ی مولدهای $\mathcal{H}$ نیز که زیرگروهی از $G$ است، زیرمجموعه‌ای از مولدهای $G$ است و متناهی است. امّا حداقل یکی از این مولّدها بدون تاب است چرا که $\mathcal{H} \simeq K \times \mathbb{Z}$ است. این مولد بدون تاب مثل $(a)$ حتماً در مرکز $G$ هست یعنی $a \in Z(G)$ ولی در $\Delta(G)$ نمی‌تواند باشد چرا که $\Delta(G)$ تولید شده توسط برگردان‌ها به انضمام عناصر تابدار $G$ هستند پس $Z(G) \nsubseteq \Delta(G)$.

### ۴.۱.۲ حلقه‌های $QFA$

**قضیه ۱۰.۱.۴** $(\mathbb{Z}, +, \times)$، $QFA$ است.

توجه کنید که اعداد مثبت در $\mathbb{Z}$ قابل تعریف‌اند. چرا که هر عدد مثبت حاصلجمع چهار مربع کامل است پس

$$x \in \mathbb{N} : \quad \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 \quad x = y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_3 + y_4 \cdot y_4$$

و به علاوه ترتیب در $\mathbb{Z}$ قابل تعریف است

$$x \geq y \iff \exists z \in \mathbb{N} \quad x = y + z$$

که در این جمله $z \in \mathbb{N}$ بودن، در بالا تعریف شده است.

و نیز تابع فاکتوریل برای هر عدد طبیعی قابل تعریف است

به طور مشخص اصول متناهی را که می‌خواهیم $\mathbb{Z}$ را به عنوان یک حلقه‌ی نامتناهی‌التولید با آنها توصیف کنیم، بصورت زیرند:

دسته اوّل) اصول موضوعه‌ی حلقه‌های ۱ دار و جابجایی

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\exists ۰\ \forall x \qquad x + ۰ = x$$

$$\forall x\ \exists (-x) \qquad x + (-x) = ۰$$

$$\forall x\ \exists y \qquad x + y = y + x$$

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \qquad z \times (x + y) = (z \times x) + (z \times y)\ \wedge\ (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$$

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \qquad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

$$\exists ۱\ \forall y \qquad ۱ \times y = y$$

$$\forall x\ \forall y \qquad x \times y = y \times x$$

دسته دوّم) تعریف رابطه‌ی ترتیب و خالی بودن بازه‌ی $(۰, ۱)$:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \ (x \geq y \ \wedge\ y \geq z) \implies x \geq z$$

$$\forall x\ \forall y \quad (x \geq y \ \vee\ y \geq x)$$

$$\forall x\ \forall y \quad (x \geq y \ \wedge\ y \geq x) \implies x = y$$

$$\forall x \quad (x \geq ۰ \ \wedge \ x \neq ۰ \ \wedge \ x \leq ۱) \implies x = ۱$$

دسته سوم) تعریف بازگشتی از تابع فاکتوریل:

$$\forall x > ۰ \qquad f(x) > ۰ \ \wedge \ f(۰) = ۱$$

$$f(x + ۱) = (x + ۱) \times f(x)$$

حال ثابت می‌کنیم اگر حلقه‌ی نامتناهی متناهی‌التولید دیگری مثل $\mathcal{H}$ چنان موجود باشد که جملات این بند همه در آن درست باشند، آن‌گاه $\mathcal{H}$ با $\mathbb{Z}$ ایزومورف است.

بر خلاف فرض کنید حلقه‌ی نامتناهی و متناهی‌المولدی چون $\mathcal{H}$ چنان موجود باشد که هر سه دسته جملات فوق‌الذکر در آن درست باشند ولی $\mathcal{H}$ با $\mathbb{Z}$ ایزومورف نباشد. چون $\mathcal{H} \not\cong \mathbb{Z}$ پس این حلقه دارای عنصر غیر استانداردی چون $c$ است که از هر عددی مثل $\underline{n}$ عضو این حلقه بزرگتر است ( توجه کنید که اعداد $\underline{n}$ در این حلقه با $\underline{n} = ۱_{\mathcal{H}} + ۱_{\mathcal{H}} + ۱_{\mathcal{H}} + \ldots$ ( $n$ بار ) مشخص می‌شوند ) یعنی $\forall \underline{n} > ۰ \qquad c > \underline{n}$. طبق دسته‌ی سوم از اصول موضوعه این حلقه به ازای هر عدد بزرگتر از صفر مثل $r$ داریم $f(r) \ |f(r-۱)$. بالاخص برای عنصر غیر استاندارد $c$ داریم $f(c) \ |f(c-n)$. بعلاوه برای هر دو عضو $\underline{r_۱}$ و $\underline{r_۲}$ از $\mathcal{H}$ داریم $\underline{r_۱}|\underline{r_۲} \ \Rightarrow \ \underline{r_۲}\mathcal{H} \leq \underline{r_۱}\mathcal{H}$.
زنجیره‌ی زیر از زیر حلقه های $\mathcal{H}$ را درنظر بگیرید:

$$f(c) \times \mathcal{H} \leq f(c - ۱) \times \mathcal{H} \leq \ldots$$

چون به ازای هر عدد $\underline{n}$، $c - \underline{n} > ۰$ پس این زنجیره نامتناهی است. امّا می‌دانیم که هر حلقه متناهی‌التولید نوتری است یعنی زنجیره‌ی ایده‌آل‌های آن از بالا کران دار است ولی ما ( با فرض عنصر غیر استاندارد $c$ در $\mathcal{H}$ ) زنجیره‌ای از ایده‌آل‌های آن را بدست آوردیم که از بالا کراندار نیست و این تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و $\mathcal{H}$ با $\mathbb{Z}$ ایزومورف است.

# مراجع


[۱] S. Akiyama, C. Frougny, and J. Sakharovitch,*Powers of rationals modulo 1 and rational base systems*, preprint, 2005.

[۲] A. Blumensath and E. Gradel, *Finite presentations of infinite structures: automataand interpretations*, **Theory of Computing Systems**, vol. 37 (2004), pp. 641-674.

[۳] J. Cannon et al., **Word processing in groups**, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.

[۴] L. Fuchs, **Infinite Abelian groups**, vol. 2, Academic Press, 1973.

[۵] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, **Publications Matheematiques IHE'S**, vol. 53 (1981), pp. 53-78.

[۶] R. Hirshon, *Some cancellation theorems with applications to nilpotent groups*, **Journal of Australian Mathematical Society** (series A), vol. 23 (1977), pp. 147-165.

[۷] W. Hodges, **Model Theory**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[۸] B. R. Hodgson, **Theories decidables par automate fini**, Ph.D. thesis, University of Montreal, 1976.

[۹] B. R. Hodgson, *Theories decidables par automate fini*, **Annales des SciencesMathematiques du Quebec**, vol. 7 (1983), pp. 39-57.

[١٠] M. Kargapolov and J. Merzljakov, **Fundamentals of the theory of groups**, Springer-Verlag, 1979.

[١١] R. Kaye, **Models of Peano Arithmetic, Oxford University Press**, Oxford, 1991.

[١٢] A. Khelif, *Bi-interpretabilite et structures QFA: etude des groupes resolubles et des anneaux commutatifs, Comptes Rendus Mathematique*, Vol. 345, No. 23 (2007), pp. 59-61.

[١٣] B. Khoussainov and A. Nerode, *Automatic presentations of structures*, **Logic and-computational complexity (D. Leivant, editor), LectureNotes in Computer Science**, vol. 960,Springer-Verlag, 1995, pp. 367-392.DESCRIBING GROUPS 339

[١۴] B. Khoussainov, A. Nies, S. Rubin, and F. Stephan, *Automatic structures: richness and limitations*, **Proceedings of the 19th IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science**, Springer-Verlag, 2004, pp. 110-119.

[١۵] S. Lang, **Algebra**, Addison-Wesley, 1965.

[١٦] A. Mal'cev, *On a correspondence between rings and groups*, **American Mathematical Society Translations**, vol. 45 (1965), pp. 221-231.

[١٧] A. Morozov and A. Nies, *Finitely generated groups and first-order logic*, **Journal ofthe London Mathematical Society**, vol. 71 (2005), no. 2, pp. 545-562.

[١٨] A. Nies, *Aspects of free groups*, **Journal of Algebra**, Vol. 263 (2003), pp. 119-125.

[١٩] A. Nies, *Separating classes of groups by first-order formulas*, **International Journal of Algebra and Computation**, vol. 13 (2003), pp. 287-302.

[٢٠] A. Nies, *Comparing quasi-finitely axiomatizable groups and prime groups*, **Journal of Group Theory**, Vol. 10, No. 3, (2007), pp. 347-361.

[٢١] A. Nies and P. Semukhin, *Finite automaton presentable abelian groups*, **Proceedings of LFCS 2007**, LNCS 4514, (2007), pp. 422-436.

[۲۲] A. Nies and R. Thomas, *Finite automaton presentable groups and rings*, **Journal of Algebra**, Vol. 320, (2008), pp. 569-585.

[۲۳] G. A. Noskov, *The elementary theory of a finitely generated almost solvable group*, **Izvestiya Akademiya Nauk SSSR Seriya Matematika**, vol. 47 (1983), no. 3, pp. 498-517.

[۲۴] F. Oger, *Equivalence elementaire entre groupes finis-par-abeliens de type fini*, **Commentarii Mathematici Helvetici**, vol. 57 (1982), no. 3, pp. 469-480.

[۲۵] F. Oger, *Cancellation and elementary equivalence of finitely generated finite-by-nilpotent groups*, **Journal of the London Mathematical Society**, vol. 30 (1991), pp. 293-299.

[۲۶] F. Oger, *Quasi-finitely axiomatizable groups and groups which are prime models*, **Journal of Group Theory**, vol. 9 (2006), no. 1, pp. 107-116.

[۲۷] F. Oger and G. Sabbagh, *Quasi-finitely axiomatizable nilpotent groups*, **Journal of Group Theory**, vol. 9 (2006), no. 1, pp. 95-106.

[۲۸] G. P. Oliver and R. M. Thomas, *Automatic presentations for finitely generated groups*, **STACS 2005** (V. Diekert and B. Durand, editors), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3404, Springer-Verlag, 2005, pp. 693-704.

[۲۹] D. Robinson, **A course in the theory of groups**, Springer-Verlag, 1988.

[۳۰] B. I. Zilber, *An example of two elementarily equivalent but not isomorphic finitely generated metabelian groups*, **Algebra i Logika**, vol. 10 (1971), pp. 309-315.

[۳۱] T. Scanlon, *Infinite finitely generated fields are bi-interpretable with N*, **Journal of the AMS**, Vol. 21, (2008), pp. 893-908.

[۳۲] J. Silver, *Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations*, **Annals of Pure and Applied Logic**, vol. 18 (1980), pp. 1-28.

[۳۳] M. Sipser, **Introduction to the theory of computation**, PWS Publishing Company, 1997.

[۳۴] W. Thomas, *Automata on infinite objects*, **Handbook of theoretical computer science** (Jan van Leeuwen, editor), vol. A, Elsevier Science Publishers B.V., 199.0, pp. 135-186.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| $FA$—نمایش پذیر | FA-presentable |
| اتوماتون | automaton |
| اتوماتون بوخی | buchi automaton |
| اتوماتون متناهی | finite automaton |
| اتوماتون نامتناهی غیر قطعی | nondeterministic finite automaton |
| اتوماتون متناهی قطعی | deterministic finite automaton |
| اصل‌پذیر | axiomatazable |
| بدون تاب | torsion free |
| بروریختی | epimorphism |
| پارامترهای زبان | language parameters |
| پیچیدگی | complexity |
| تاب | torsion |
| تابع انتقال | transition function |
| تحدید | restriction |
| تصمیم پذیر | decidable |
| تعبیر پذیر | interpretable |
| تعریف پذیر | definable |
| یکریختی | monomorphism |

| | |
|---|---|
| توسیع | extension |
| جمله‌ی خوش ساخت | well-founded sentence |
| وضعیت (حالت) | state |
| وضعیت اولیه | initial state |
| وضعیت پذیرش نهایی | acception state |
| وضعیت رد نهایی | rejection state |
| وضعیت نهایی | final state |
| حوزه صحیح | integral domain |
| حوزه صحیح یکدار | unity integral domain |
| خاصیت تفحص در ارزیابی | query evaluation property |
| رابطه بازگشتی | recursive relation |
| روش کارامد | effective way |
| زبان | language |
| زبان منظم | regular language |
| زیر گروه برگردانها | commutator subgroup |
| ساخت | structure |
| سلسله مراتب حسابی | arithmetical hierarchy |
| شبه متناهیاً اصل پذیر | quasi finitely axiomable |
| شمارش پذیر بازگشتیانه | recursively enumerable |
| ضعیفاً $FA$−نمایش پذیر | weakly FA-representable |
| قضیه | theorem |
| گروه پوچ توان مرتبه$n$ | class n nilpotent group |
| گنجاندن | embed |
| لم تزریق | pumping lemma |

| | |
|---|---|
| ماکسیمال | maximal |
| متناهیاً تولید شده | finitely generated |
| متناهیاً اصل پذیر | finitely axiomatizable |
| مرکز یک گروه | center of a group |
| مساله کلمه | word problem |
| منطق محمولات درجه‌اول | first order logic |
| موضعاً آبلی متناهی | abelian-by-finite |
| موضعاً پوچ توان متناهی | nilpotent-by-finite |
| نظریه | theory |
| نماد | signature |
| نمادهای محمولی | predicate symbols |
| نمادهای منطقی | logical symbols |
| نمایش | representation |
| همریختی | homomorphism |
| یکریختی | isomorphism |

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

abelian-by-finite ........ موضعاً آبلی متناهی

acception state ........ وضعیت پذیرش نهایی

arithmetical hierarchy ........ سلسله مراتب حسابی

automaton ........ اتوماتون

axiomatizable ........ اصل‌پذیر

buchi automaton ........ اتوماتون بوخی

center of a group ........ مرکز یک گروه

class n nilpotent group ........ گروه پوچ توان مرتبه $n$

commutator subgroup ........ زیر گروه برگردانها

complexity ........ پیچیدگی

decidable ........ تصمیم پذیر

definable ........ تعریف پذیر

deterministic finite automaton ........ اتوماتون متناهی قطعی

effective way ........ روش کارامد

embed ........ گنجاندن

epimorphism ........ بروریختی

extension ........ توسیع

FA-presentable ........ $FA$—نمایش پذیر

| | |
|---|---|
| finitely generated | متناهیاً تولید شده |
| final state | وضعیت نهایی |
| finite automaton | اتوماتون متناهی |
| finitely axiomatizable | متناهیاً اصل پذیر |
| first order logic | منطق محمولات درجه‌اول |
| homomorphism | همریختی |
| initial state | وضعیت اولیه |
| integral domain | حوزه صحیح |
| interpretable | تعبیر پذیر |
| isomorphism | یکریختی |
| language | زبان |
| language parameters | پارامترهای زبان |
| logical symbols | نمادهای منطقی |
| maximal | ماکسیمال |
| monomorphism | تکریختی |
| nilpotent-by-finite | موضعاً پوچ توان متناهی |
| nondeterministic finite automaton | اتوماتون نامتناهی غیر قطعی |
| predicate symbols | نمادهای محمولی |
| pumping lemma | لم تزریق |
| quasi finitely axiomable | شبه متناهیاً اصل پذیر |
| query evaluation property | خاصیت تفحص در ارزیابی |
| recursive relation | رابطه بازگشتی |
| recursively enumerable | شمارش پذیر بازگشتیانه |
| regular language | زبان منظم |

rejection state ........ وضعیت رد نهایی

representation ........ نمایش

restriction ........ تحدید

signature ........ نماد

state ........ وضعیت (حالت)

structure ........ ساخت

theory ........ نظریه

theorem ........ قضیه

torsion ........ تاب

torsion free ........ بدون تاب

transition function ........ تابع انتقال

unity integral domain ........ حوزه صحیح یکدار

weakly FA-representable ........ ضعیفاً $FA$–نمایش پذیر

well-founded sentence ........ جملات خوش ساخت

word problem ........ مساله کلمه

## Abstract

The goal of this thesis is to study the finite ways of describing an arbitary group uniquely up to isomorphisem. To approch this goal, we considered two ways: 1. A group is finite-automaton presentable if its elements can be represented by strings over a finite alphabet, in such a way that the set of representing strings and the group operation can be recognized by a finite automaton.

2. An infinite finitely generated group is quasi-finitely axiomatizable if there is a first order sentence in its language that describes it uniquely up to isomorphism.

In this thesis, we try to clarify the necessary notations and consepts like finite automata and some logical tools. We also discuss about some restrictions and complexities of the above two ways. The main source of this thesis is the paper:

Andrè Nies, Describing Groups, The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 13, Number 3, Sept. 2007, 305-339.

**Institute for Advanced Studies**
**in Basic Sciences**
Gava Zang, Zanjan, Iran

# A Study of Algebraic Structures By Logical Tools

Master Thesis

Farzad Elmi

Supervisors: Dr. Saeed Salehi
Dr. Rashid ZareNahandi

October 2010